Esercizio 1

Applicando la legge di Gauss si ricava il campo uniforme generato dal foglio carico uniformemente con densità superficiale di carica σ:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{u}_x$$

Per l'equilibrio:

$$mg\tan\theta = qE \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{2\epsilon_0 mg\tan\theta}{q} \simeq 5.11\ nC/m^2$$

Data la lunghezza del filo di seta, la pallina si trova ad una distanza dal piano $d = L\sin\theta \simeq 15$ cm.

$$V(P) = -\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\int_0^d \frac{\sigma}{2\epsilon_0}dx = -\frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \simeq -43.3\ V$$

Esercizio 2

Calcoliamo la capacità del condensatore sferico a partire dall'espressione della d.d.p. tra le armature:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k_e r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k_e}\left[-\frac{1}{r}\right|_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k_e}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 k_e\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \simeq 4\,pF$$

A regime l'energia immagazzinata nel condensatore è $U = CV^2/2 = 50$ pJ, mentre la carica presente sulle armature sarà $Q = CV = 20$ pC. Le densità di carica di polarizzazione saranno rispettivemente in modulo:

$$\sigma_{p1} = \frac{k_e - 1}{k_e}\sigma_1 = \frac{k_e - 1}{k_e}\frac{Q}{4\pi R_1^2} \simeq 73.6\ nC/m^2; \qquad \sigma_{p2} = \frac{k_e - 1}{k_e}\sigma_2 = \frac{k_e - 1}{k_e}\frac{Q}{4\pi R_2^2} \simeq 24\ nC/m^2$$

Esercizio 3

Chiamato E_1 il campo elettrico nel rame e E_2 nello zinco, avremo:

$$\Delta V = E_1 L_1 + E_2(L_{tot} - L_1) \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{\Delta V - E_2 L_{tot}}{E_1 - E_2}$$

Poichè la sezione del conduttore è costante, dalla legge di Ohm, nei due materiali il $\vec{E}$ vale rispettivamente:

$$E_1 = \phi_1 j; \qquad E_2 = \phi_2 j$$

Applicando la legge di Gauss all'interfaccia tra i due materiali:

$$\Phi_A(E) = (E_2 - E_1)A = (\phi_2 - \phi_1)j\cancel{A} = \frac{\sigma\cancel{A}}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad j = \frac{\sigma}{\epsilon_0(\phi_2 - \phi_1)} \simeq 500\ A/cm^2$$

Si ricava dunque:

$$L_1 = \frac{\Delta V - E_2 L_{tot}}{E_1 - E_2} = \frac{\Delta V - \phi_2 j L_{tot}}{(\phi_1 - \phi_2)j} \simeq 93\ cm$$

Esercizio 4

Il campo magnetico prodotto dal filo nel piano che contiene la spirà è $\vec{B}(t) = -\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\hat{u}_z$. Il flusso attraverso la superficie della spira è dato da:

$$\Phi(B) = \oint_\Sigma \vec{B}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi}\int_{2a}^{2a+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi}\ln(2)$$

$$i_{ind}(t) = \frac{f.e.m.(t)}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(B)) = \frac{\mu_0 a}{R\pi}\ln(2)\,e^{-4t}$$

$$Q_{tot} = \int_0^\infty i_{ind}(t)dt = \frac{\mu_0 a}{R\pi}\ln(2)\left(-\frac{1}{4}e^{-4t}\right|_0^\infty = \frac{\mu_0 a}{4R\pi}\ln(2) \simeq 10\ nC$$

Esercizio 5

$$f' = \frac{pq'}{p + q'} = 12\ cm \qquad f'' = \frac{pq''}{p + q''} \cong 31\ cm$$

$$\begin{cases} f' = \left(\dfrac{1}{n-1}\right)\dfrac{R}{2} \\ f'' = \left(\dfrac{n_a}{n - n_a}\right)\dfrac{R}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} n = \dfrac{n_a(f'' - f')}{f'' - n_a f'} \cong 1.6 \\ R \cong 14.4\ cm \end{cases}$$

Esercizio 6

Lunghezza d'onda e pulsazione angolare si ricavano come segue:

$$\lambda_o = 2\pi/k \simeq 1.26\ \mu m \qquad \omega = kc \simeq 15 \cdot 10^{14}\ rad/s$$

Il campo elettrico si propaga anch'esso in fase con il campo magnetico lungo x ma è polarizzato lungo -$\hat{z}$ (con $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$):

$$E_o = cB_o \simeq 0.6\ V/m \qquad \vec{E} = -E_o \sin(kx - \omega t)\hat{z}$$

Per la pressione di radiazione troviamo prima l'intensità dell'onda:

$$I = \frac{|E_o|^2}{2Z_o} \simeq 0.48\ mW/m^2 \qquad P = \frac{2I}{c} \simeq 3.18\ pN/m^2$$