Esercizio 1

Dal momento che $\delta \ll R$, il campo elettrico generato dalla carica sulla superficie curva della calotta sferica sarà radiale e varrà:

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\hat{u}_r \quad \rightarrow \quad \Phi_1(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}2\pi R^2 = \frac{q}{2\epsilon_0}\ Vm$$

La carica è esterna al volume della calotta sferica, pertanto applicando la legge di Gauss si ricava immediatamente il flusso attraverso la parte piana della superficie:

$$\oint_{\Sigma_{tot}} \vec{E}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_2 = -\Phi_1 = -\frac{q}{2\epsilon_0}\ Vm$$

Esercizio 2

La carica che flusice durante la fase di pressione del tasto dipende dalla variazione di capacità a tensione costante:

$$\Delta Q = V_0\Delta C = V_0\left(\frac{\epsilon_0 kS}{d/2} - \frac{\epsilon_0 kS}{d}\right) = V_0\epsilon_0 k\frac{S}{d} \simeq 0.22\ pC$$

Durante la pressione del tasto, la batteria compie il lavoro di pompare una carica pari a ΔQ sulle armature del condensatore alla tensione costante V_0:

$$W = \int_{Q_0}^{Q_0+\Delta Q} V_0 dq = V_0\Delta Q \simeq 1.1\ pJ$$

Esercizio 3

$$R_c = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S} = 5.3\ \Omega \qquad R_c i^2 = P_c \quad \rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{P_c}{R_c}} \simeq 0.87\ A$$

$$V_0 = (r_i + R_c)i \quad \rightarrow \quad r_i = \frac{V_0}{i} - R_c = 455\ m\Omega \qquad \eta = \frac{P_c}{P_{gen}} = \frac{R_c i^2}{V_0 i} = \frac{R_c i}{V_0} \simeq 0.92$$

$P_c = R_c i^2 = R_c\dfrac{V_0^2}{(R_c + r_i)^2}$ per determinare il max della funzione $P_c(R_c)$ calcolo la derivata e la pongo uguale a 0

$$\frac{dP_c}{dR_c} = \frac{r_i - R_c}{(r_i + R_c)^3}V_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad R_c = r_i \ \text{(adattamento del carico)}$$

di conseguenza: $L_{opt} = \sigma S R_{opt} = \sigma S r_i \simeq 8.58\ m$

Esercizio 4

Il campo magnetico in P risulta dalla sovrapposizione dei campi generati indipendentemente da ognuno dei due fili percorsi da corrente. Per considerazioni di simmetira, la sola componente che risulta diversa da 0 è quella allineata lungo $\hat{x}$, direzione lungo cui il contributo dei due fili si somma:

$$\vec{B} = 2B_1\cos\theta\hat{u}_x \quad \text{con} \qquad \cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{R^2 + d^2/4}}$$

Per il calcolo di B_1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi\sqrt{R^2 + d^2/4}}$$

Si ottiene complessivamente:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i d}{2\pi(R^2 + d^2/4)}\hat{u}_x = 0.2\hat{u}_x\ \mu T$$

Esercizio 5

Ricordando che $M = (k_m - 1)H$, troviamo l'espressione di H. Applichiamo la legge di ampere al vettore H:

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{ds} = 2\pi RH = Ni \quad \rightarrow \quad H = \frac{Ni}{2\pi R}$$

Abbiamo dunque:

$$M = (k_m - 1)\frac{Ni}{2\pi R} \approx k_m\frac{Ni}{2\pi R} \quad \rightarrow \quad i = M\frac{2\pi R}{Nk_m} \simeq 0.5\ A$$

Esercizio 6

$$\Phi(t=0) = N\int_\Sigma \vec{B}(0)\cdot\hat{u}_n d\Sigma = N\frac{1}{2}\pi r^2\cos\theta \simeq 785\ mWb$$

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{N}{R}\pi r^2\cos\theta\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^{-2t}\right) \simeq \frac{N}{R}\pi r^2\cos\theta e^{-2t} = \frac{\pi}{20}e^{-2t}\ A$$