Tutorato di Fisica 2 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

14 dicembre 2014

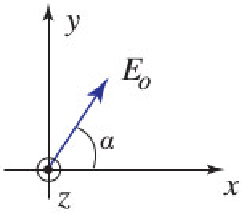
1 Esercizi

1.1 Esercizio 1

Un'onda elettromagnetica piana è caratterizzata da un campo elettrico espresso dalla seguente relazione: $E(t) = (12 \cdot 10^3)\cos((2\pi \cdot 10^{11})t - (666 \cdot \pi)x)\ V/m$. Quanto vale la frequenza del relativo campo magnetico?

1.2 Esercizio 2

Un'onda piana, monocromatica, polarizzata linearmente, si propaga nel vuoto lungo $\hat{z}$ con frequenza $f = 3 \cdot 10^{14}\ Hz$. Il campo elettrico è inclinato di $\alpha = \pi/3$ come in figura rispetto l'asse $\hat{x}$ e il modulo vale $E_0 = 2\ kV/m$. Scrivere l'espressione del campo elettrico E e del campo magnetico B. Si calcoli infine l'intensità I dell'onda.



1.3 Esercizio 3

Un trasmettitore emette onde elettromagnetiche in un cono che copre un angolo solido $\Delta\Omega = 2 \cdot 10^{-2} rad$. Ad una distanza $r_1 = 2\ cm$ dal trasmettitore l'ampiezza massima del campo elettrico è $E_1 = 20\ V/m$. Calcolare l'ampiezza massima del campo magnetico; la potenza emessa dal trasmettitore; il campo E_2 alla distanza $r_2 = 10 cm$.

1.4 Esercizio 4

Una lente sottile è costituita di un materiale di indice di rifrazione $n = 1.3$. Il primo raggio è $R_1 = -15\ cm$ mentre il secondo è $R_2 = 30\ cm$. Supponendo di porre un oggetto alto $y = 5\ cm$ a $p = 10\ cm$ dalla lente, rappresentare graficamente l'immagine e determinarne posizione (q) e altezza finale (y').

2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Le equazioni che rappresentano l'evoluzione del campi che compongono un'onda elettromagnetica sono:

$$E(t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{2.1}$$

$$B(t) = B_0 \cos(kx - \omega t) \tag{2.2}$$

Si nota che le due cosinusoidi hanno la stessa pulsazione, indice del fatto che i due campi oscillano con la stessa frequenza. Si ricava quindi la frequenza del campo elettrico:

$$f_B = f_E = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10^{11}}{2\pi} = 10^{11}\ Hz = 100\ GHz \tag{2.3}$$

2.2 Esercizio 2

Per scrivere l'equazione dell'onda servono innanzitutto la pulsazione ω e il numero d'onda k .

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{14} \simeq 1.884 \cdot 10^{15}\ rad/s \tag{2.4}$$

$$\frac{\omega}{k} = c \longrightarrow k = \frac{\omega}{c} = 6.28 \cdot 10^{6}\ rad/m \tag{2.5}$$

L'onda è polarizzata lungo una direzione non parallela agli assi. È quindi necessario scomporre i campi lungo le due componenti cartesiane. Il campo totale sarà la somma delle componenti.

$$E_{0x} = E_0 \cos\alpha = 1\ kV/m \tag{2.6}$$

$$E_{0y} = E_0 \sin\alpha = \sqrt{3}\ kV/m \tag{2.7}$$

Si può ora scrivere l'espressione delle componenti del campo elettrico lungo gli assi:

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} = \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{x} \tag{2.8}$$

$$E_y(z,t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t)\,\hat{y} = \sqrt{3}\cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{y} \tag{2.9}$$

E la formula del campo totale:

$$\begin{gathered} E(z,t) = E_x(z,t) + E_y(z,t) = \\ = \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{x} + \sqrt{3}\cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{y} \end{gathered} \tag{2.10}$$

L'espressione del campo magnetico B si ricava dalla relazione tra campo elettrico e magnetico di un'onda:

$$\vec{B} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}}{c} \tag{2.11}$$

Il prodotto vettoriale fa sì che la componente del campo B lungo l'asse $\hat{x}$ sia proporzionale alla componente $\hat{y}$ di E e orientata nel verso negativo.

$$B_{0x} = -\frac{E_{0y}}{c} = -5.77\ \mu T \tag{2.12}$$

$$B_{0y} = \frac{E_{0x}}{c} = 3.33\ \mu T \tag{2.13}$$

$$B_x(z,t) = B_{0x} \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} = -5.77 \cdot 10^{-6} \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{x} \tag{2.14}$$

$$B_y(z,t) = B_{0y} \cos(kz - \omega t)\,\hat{y} = 3.33 \cdot 10^{-6} \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{y} \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} B(z,t) = B_x(z,t) + B_y(z,t) = \\ = -5.77 \cdot 10^{-6} \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{x} + 3.33 \cdot 10^{-6} \cos\left(6.28 \cdot 10^6 z - 1.88 \cdot 10^{14} t\right)\hat{y} \end{gathered} \tag{2.16}$$

L'intensità di un'onda elettromagnetica è data dalla formula:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \simeq 5.3\ kW/m^2 \tag{2.17}$$

2.3 Esercizio 3

Ricordando la relazione che lega le ampiezze dei due campi che compongono un'onda elettromagnetica:

$$B_1 = \frac{E_1}{c} = 67 \ nT \tag{2.18}$$

La potenza trasmessa dall'onda si ricava moltiplicando la sua intensità per la superficie interessata dalla radiazione:

$$P = I \cdot A = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \cdot r_1^2 \Delta\Omega \simeq 4.25 \ \mu W \tag{2.19}$$

Per il principio di conservazione dell'energia, tale grandezza deve rimanere costante a qualsiasi distanza dalla sorgente:

$$P_1 = P_2 \tag{2.20}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\epsilon_0} c E_{01}^2 \cdot r_1^2 \cancel{\Delta\Omega} = \cancel{\frac{1}{2}\epsilon_0} c E_{02}^2 \cdot r_2^2 \cancel{\Delta\Omega} \tag{2.21}$$

$$E_{01} r_1 = E_{02} r_2 \tag{2.22}$$

$$E_{02} = \frac{r_1}{r_2} E_{01} = 4 \ V/m \tag{2.23}$$

2.4 Esercizio 4

Si applica l'equazione degli ottici per ricavare la distanza focale:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = -3 \ diottrie \tag{2.24}$$

Equazione dei punti coniugati per ottenere la distanza cui si forma l'immagine:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \longrightarrow q = \frac{pf}{p-f} \simeq -7.7 \ cm \tag{2.25}$$

Formula dell'ingrandimento per ottenere l'altezza dell'immagine:

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p} \longrightarrow y' = \frac{q}{p} \cdot y = -3.85 \ cm \tag{2.26}$$