Tutorato di Fisica 2 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

29th October 2014

1 Esercizi

1.1 Esercizio 1

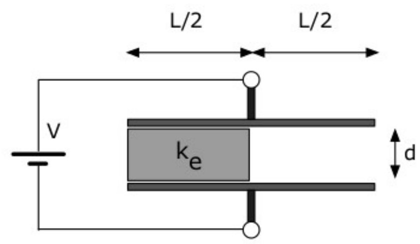
Si considerino tre piani infiniti paralleli, caricati con densità superficiale di carica $\sigma_1 = 94\ C/m^2$; $\sigma_2 = 24\ C/m^2$; $\sigma_3 = 50\ C/m^2$. Tra il piano 1 ed il piano 2 sia presente un dielettrico A con $\epsilon_r = 4$. Si calcoli quanto vale in modulo direzione e verso il vettore $\overrightarrow{D}$ nella regione di spazio compresa tra il piano 1 e il piano 2.

1.2 Esercizio 2

Un condensatore piano ha armature di superficie $S = 0.2\ m^2$ distanziate di $d = 1\ cm$. Viene collegato ad un generatore di tensione ($\Delta V = 75\ V$). Se il condensatore è riempito con un materiale dielettrico ($\epsilon_r = 5$), quanto vale - in valore assoluto - la carica di polarizzazione affacciata a ciascuna piastra?

1.3 Esercizio 3

Un condensatore ad armature quadrate piane e parallele è riempito per metà da un dielettrico di costante dielettrica relativa $k_e = 5$. Le armature hanno lato $L = 20\ cm$ e distano $d = 5\ mm$. Calcolare la capacità del sistema. Il condensatore viene collegato ad un generatore in grado di erogare una $d.d.p. = 3\ V$. Calcolare il campo elettrico nelle due metà del condensatore, la densità superficiale di carica di polarizzazione σ_p sulle facce del dielettrico e l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore. Se il dielettrico viene infine estratto dal condensatore, calcolare la quantità di carica che circola nella batteria.



1.4 Esercizio 4

Un condensatore piano ha armature di area $\Sigma = 100\ cm^2$ distanti $d = 4\ cm$.
Il condensatore viene caricato e successivamente scollegato dalla batteria. Sull'armatura inferiore è appoggiato un dielettrico di area Σ, spessore $h = 3\ cm$ e costante dielettrica relativa $k = 5$. Sapendo che la densità di carica di polarizzazione sulle facce del dielettrico è $\sigma_p = 400\ pC/m^2$, determinare la d.d.p. ai capi del condensatore e l'energia in esso immagazzinata.

1.5 Esercizio 5

Un condensatore sferico di raggio interno $r_1 = 5\ cm$ e raggio esterno $r_2 = 5.35\ cm$ è riempito di carta ($k = 5$). Calcolare la capacità del sistema. Calcolare la massima energia che può essere immagazzinata nel condensatore se il campo elettrico massimo sopportato dalla carta è $E_{max} = 30\ kV/mm$.

2 Risultati

2.1 Esercizio 1

$\overrightarrow{D} = 10\hat{x}\ C/m^2$.

2.2 Esercizio 2

$\sigma_p = 53.1\ nC$.

2.3 Esercizio 3

$C = 212\ pF$.
$E = 600\ V/m$.
$|\sigma_p| = 21.2\ nC$.
$U = 0.96\ nJ$.
$\Delta Q = 425\ pC$.

2.4 Esercizio 4

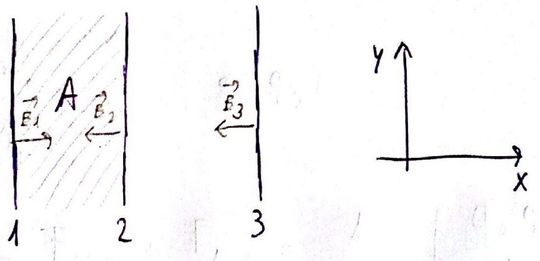
$\Delta V = 0.9\ V$.
$U = 2.26\ pJ$.

2.5 Esercizio 5

$C = 0.425\ nF$.
$U = 81.8\ mJ$.

3 Soluzioni

Esercizio 1



Si calcola dapprima il campo elettrico presente nella regione A, sovrapponendo gli effetti dei 3 piani.

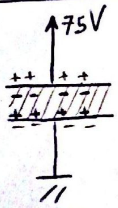
vedi freccia di $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{\sigma_1 \hat{x}}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{\sigma_2 \hat{x}}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{\sigma_3 \hat{x}}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\,\hat{x}$$

Poi si sfrutta la relazione tra $\vec{D}$ ed $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\,\hat{x} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\,\hat{x} = \boxed{10\ C/m^2\ \hat{x}}$$

Esercizio 2



La densità di carica indotta sulla superficie di contatto tra il dielettrico e le armature è pari al modulo del vettore polarizzazione dielettrica. Quest'ultimo è ricavabile dal campo elettrico $\vec{E}$, che, a sua volta, dipende dalla differenza di potenziale cui è sottoposto il condensatore.

$$E = \frac{V}{d}$$

$$P = \varepsilon_0 (k-1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\frac{V}{d}$$

$$\sigma = |P| = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\frac{V}{d}$$

$$Q = \sigma \cdot S = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\frac{V}{d} S = \boxed{53{,}1\ nC}$$

Esercizio 3

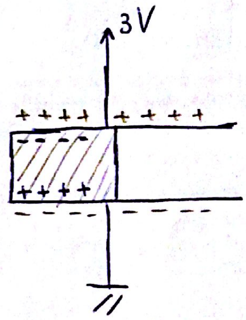
* Per il calcolo della capacità si considera il sistema un parallelo tra due condensatori - uno ~~tutto~~ riempito con il dielettrico, l'altro con aria - ~~da~~ con armature di uguale superficie $S = L \cdot L/2 = L^2/2$

$$C = C_1 \parallel C_2 = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 k_e \frac{L^2}{2d} + \varepsilon_0 \frac{L^2}{2d} = \boxed{212\ pF}$$

* Per rispettare la conservatività del campo elettrico, le componenti di $\vec{E}$ parallele all'interfaccia tra due dielettrici devono essere congruenti.

$$E_{aria} = E_{dielettrico} = \frac{\Delta V}{d} = \frac{3}{5 \cdot 10^{-3}} = \boxed{600\ V/m}$$

* Vedi ESERCIZIO 2



$$\sigma_p = |\vec{P}| = \varepsilon_0 (K-1) E = \boxed{21{,}2\ nC/m^2}$$

Dal disegno si deduce

$\sigma_p = +21{,}2\ nC/m^2$ sulla faccia inferiore
$\sigma_p = -21{,}2\ nC/m^2$ " " superiore

* $U = 1/2\, C\, \Delta V^2 = \boxed{0{,}96\ nJ}$

* Partendo dalla relazione $Q = CV$, si osserva che, mentre il dielettrico viene rimosso, l'unica grandezza variabile è C. ΔV, infatti, rimane costante grazie all'azione della batteria.

$$\Delta Q = |\Delta C| \cdot V = |C_{fin} - C_{init}| \cdot V = \left| \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} - C_{init} \right| \cdot V = \boxed{425\ pC.}$$

Esercizio 4

* Per ricavare la tensione mediante la formula $V = \frac{Q}{C}$, occorre determinare la carica libera presente sulle armature e la capacità del condensatore.

La prima quantità si ottiene a partire dalla carica di polarizzazione:

$$\sigma_p = \frac{k-1}{k}\sigma_l \qquad \sigma_l = \frac{k}{k-1}\sigma_p = 500\ pC/m^2$$

Per il calcolo della capacità è opportuno assimilare il sistema ad una serie di due condensatori:

$$C_{aria} = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{d-h}$$

$$C_{dielettrico} = \varepsilon_0 k \frac{\Sigma}{h}$$

$$C_{TOT} = C_{aria} \text{ SERIE } C_{diel.} = \frac{C_a \cdot C_d}{C_a + C_d} \simeq 5{,}53\ pF$$

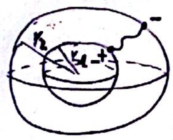
ora,

$$V = \frac{Q}{C} = \boxed{0{,}9\ V}$$

* $U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \Sigma \cdot \sigma_l \cdot V = \boxed{2{,}26\ pJ}$

Esercizio 5

* Per il calcolo della capacità, si suppone di conoscere la carica Q presente sulle armature. In tal modo è possibile calcolare la differenza di potenziale tra le armature come integrale del campo elettrico. Successivamente si inserirà il valore ottenuto nella formula $C = \frac{Q}{\Delta V}$ verificando l'elisione di Q. La capacità è infatti una grandezza indipendente dalla carica depositata sulle armature.



$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\, dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k r^2}\, dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \cancel{Q} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 k}{\cancel{Q}} \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} = 4\pi\varepsilon_0 k \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \boxed{0{,}425\ nF}$$

* L'energia immagazzinata nel condensatore è data dalla formula $U = \frac{Q^2}{2C}$. Essa è quindi massima quando lo è la carica sulle armature. Dal momento che la carica è correlata al campo, da quest'ultimo è possibile risalire al valore limite. Ricordando che $\vec{E}$ è massimo ove r è minimo:

$$E_{MAX} = \frac{Q_{MAX}}{4\pi\varepsilon_0 k r_1} \qquad Q_{MAX} = 4\pi\varepsilon_0 k r_1 E_{MAX} = 8{,}43\ \mu C$$

$$U_{MAX} = \frac{Q_{MAX}^2}{2C} = \boxed{81{,}8\ mJ}$$