Tutorato di Fisica 2 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

28th October 2014

1 Esercizi

1.1 Esercizio 1

Una sfera conduttrice sferica con raggio $R = 0.5\ cm$ ha una densità di carica $\sigma = \frac{8}{\pi}\ mC/m^2$. Quanto vale il flusso del campo $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa S che contiene la sfera?

1.2 Esercizio 2

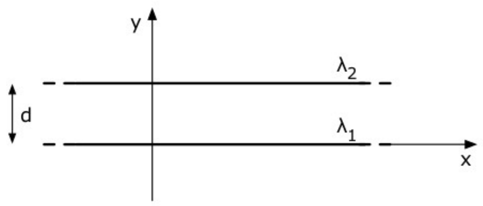
Un potenziale elettrico ha il seguente andamento $V(x, y, z) = \frac{1}{5x^4-5}$. Quanto vale in modulo direzione e verso il campo elettrico nel punto $P(x = 3m, y = 2m, z = 5m)$?

1.3 Esercizio 3

Una sfera di raggio R è carica con una densità volumica di carica $\rho(r) = \frac{\sqrt{r}}{4\pi}$. Determinare l'espressione del campo elettrico prodotto dalla sfera nello spazio.

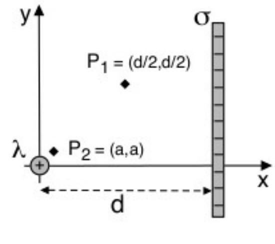
1.4 Esercizio 4

Due fili indefiniti paralleli giacciono nel piano xy. I fili sono uniformemente carichi con densità di carica $\lambda_1 = 0.5\ \mu C/m$ e $\lambda_2 = 1\ \mu C/m$, rispettivamente. Se la distanza tra i due fili è $d = 3m$, a che distanza dal primo filo nel piano xy il campo è nullo? Quanto vale il campo elettrico generato nel piano xy dai due fili a distanza $y \gg d$?



1.5 Esercizio 5

Un filo isolante rettilineo indefinito, perpendicolare al piano xy e passante per l'origine (vedi figura), è caricato uniformemente con densità lineare di carica $\lambda = +100\ nC/m$. A distanza $d = 2\ cm$ dal filo, un piano perpendicolare all'asse x, anch'esso non conduttivo, è caricato uniformemente con densità superficiale di carica $\sigma = -1\mu C/m^2$. Calcolare il campo elettrostatico nel punto P_1 di coordinate $(d/2, d/2)$ e la d.d.p. tra il punto P_2 di coordinate (a, a) con $a = 1\ mm$, e il punto P_1 .



2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Legge di Gauss:

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^4 \ V \cdot m \tag{2.1}$$

2.2 Esercizio 2

Relazione tra campo elettrico e potenziale:

$$\overrightarrow{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{\nabla} V = \left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5x^4-5}\right), 0, 0\right) = \left(-\frac{-20x^3}{(5x^4-5)^2}, 0, 0\right) \tag{2.2}$$

Nel punto considerato:

$$\overrightarrow{E}(3,2,5) = \left(\frac{20 \cdot 3^3}{(5 \cdot 3^4 - 5)^2}, 0, 0\right) = 3.375 \cdot 10^{-3} \hat{x} \ V/m \tag{2.3}$$

2.3 Esercizio 3

Si analizzeranno due casi: lo spazio interno alla sfera e quello esterno.

1. Per $r < R$, l'applicazione della legge di Gauss consente di scrivere:

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{2.4}$$

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

Dove τ è l'elemento infinitesimo di volume, in questo caso un guscio sferico di superficie $4\pi r^2$ e spessore infinitesimo dr.
Inoltre il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica sferica è sempre radiale. Questo significa che, ad una data distanza r, il modulo di $\overrightarrow{E}$ è costante e la direzione è sempre parallella alla normale alla superficie. Tali considerazioni consentono di risolvere il prodotto scalare ed estrarre $\overrightarrow{E}$ dall'integrale.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \frac{\sqrt{r}}{4\pi} \cdot 4\pi r^2 dr \tag{2.6}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r r^{\frac{5}{2}} dr \tag{2.7}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{7} r^{\frac{7}{2}} \tag{2.8}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{14\pi\epsilon_0} \hat{r} \tag{2.9}$$

2. Per $r > R$, si utilizza lo stesso procedimento, tenendo in conto che la distanza dal centro aumenta, ma la carica interna alla superficie attraverso la quale si calcola il flusso rimane costante. L'integrale per il calcolo della carica deve quindi fermarsi a R:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sqrt{r}}{4\pi} \cdot 4\pi r^2 dr \tag{2.10}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R r^{\frac{5}{2}} dr \tag{2.11}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{7} R^{\frac{7}{2}} \tag{2.12}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{R^{\frac{7}{2}}}{14\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \tag{2.13}$$

2.4 Esercizio 4

Principio di sovrapposizione gli effetti: si trovano i contributi dei due fili e poi si sommano. Il calcolo del campo si esegue mediante la legge di Gauss, utilizzando una superficie cilindrica il cui asse è il filo. Il raggio è y, l'altezza h:

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{2.14}$$

$$2\pi y E_1 h = \frac{h\lambda_1}{\epsilon_0} \tag{2.15}$$

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{y} \tag{2.16}$$

Allo stesso modo, tenendo conto che la distanza y' dal secondo filo è esprimibile come $y - d$, si ottiene:

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 (y-d)}\hat{y} \tag{2.17}$$

Se il campo dev'essere nullo:

$$E_1 + E_2 = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 y} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 (y-d)} = 0 \tag{2.19}$$

$$y = \frac{d}{3} = 1\ m \tag{2.20}$$

Per $y \gg d$, la quantità $y - d$ è circa uguale a y. Il campo totale risulta quindi essere:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{y} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 (y-d)}\hat{y} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{y} + \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{y} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 y}\hat{y}$$

Ovvero il campo generato da un singolo filo con densità di carica pari alla somma delle due.

2.5 Esercizio 5

Si applica la legge di Gauss per determinare il campo generato dal filo e dal piano:

$$2\pi r h E_{filo} = \frac{h\lambda}{\epsilon_0} \tag{2.21}$$

$$\overrightarrow{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\hat{x} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\hat{y}\right) \tag{2.22}$$

$$\overrightarrow{E}_{piano} = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\hat{x} \tag{2.23}$$

Sommando le componenti sui due assi, si ricava:

$$E_x = 146\ kV/m \tag{2.24}$$

$$E_y = 89.9\ kV/m \tag{2.25}$$

Per calcolare la differenza di potenziale occorre integrare il campo elettrico:

$$V_2 - V_1 = \int_{P_2}^{P_1} (E_{filo} + E_{piano}) \cdot dl \tag{2.26}$$

$$V_2 - V_1 = \int_{\sqrt{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}d} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}dr + \int_a^{\frac{d}{2}} \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d}{2a}\right) + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\left(\frac{d}{2} - a\right) \simeq 4.65\ kV \tag{2.27}$$