Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

21 febbraio 2015

1 Termodinamica

1.1 Esercizio 1

Una bolla di aria di volume $V = 20\ cm^3$ si trova sul fondo di un lago di profondità $h = 40\ m$ dove la temperatura è $T_1 = 4\ ^\circ C$. La bolla sale in superficie, che si trova ad una temperatura $T_2 = 20\ ^\circ C$. Se la bolla si mantiene in equilibrio termico con l'acqua circostante, determinare il suo volume quando arriva in superficie.

1.2 Esercizio 2

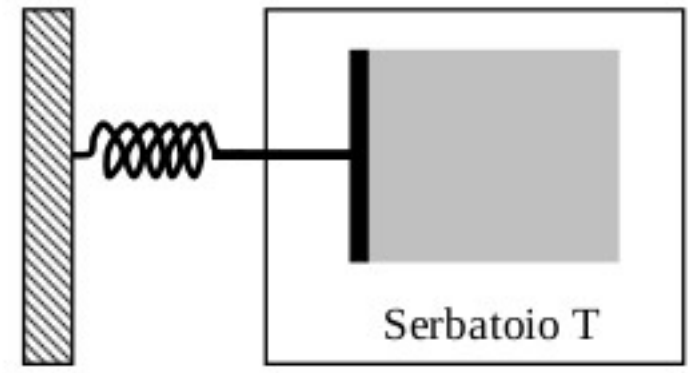
Un pallone sonda di massa $M = 2\ kg$ è riempito di elio alla pressione $P = 2\ atm$ e alla temperatura $T = 0\ ^\circ C$. L'involucro del pallone racchiude un volume $V = 5\ m^3$. La massa molare dell'elio è $MM = 4\ g/mol$ e $1\ l$ di aria a condizioni di temperatura e pressione standard ha massa $m_a = 1.29\ g$. Calcolare la minima massa m_z della zavorra necessaria per impedire al pallone di sollevarsi dal suolo.

1.3 Esercizio 3

In un contenitore adiabatico ci sono $n = 4\ mol$ di gas perfetto e $m = 20\ g$ di ghiaccio alla temperatura$T = 0\ ^\circ C$ e alla pressione $P = 1\ atm$. Si opera una compressione reversibile finché tutto il ghiaccio si è trasformato in acqua. Noto il calore latente di fusione del ghiaccio $L_f = 333.5\ kJ/kg$, si stabilisca la pressione del gas a fenomeno concluso.

1.4 Esercizio 4 (TE 30-Giu-2006, Ing. IND)

Un sistema di n moli di gas è contenuto in un serbatoio cilindrico di sezione S immerso in un liquido a temperatura fissa T che garantisce il mantenimento della temperatura stessa nel gas. Una molla di costante elastica k è collegata al pistone ed è a riposo (né compressa, né allungata) quando il gas occupa il volume V_1 . Se il gas si espande lentamente dal volume V_1 al volume V_2 qual è il lavoro compiuto dal gas ? Quanto calore è scambiato con il serbatoio? Quanto vale la variazione d'entropia del gas?



1.5 Esercizio 5 (TE 16-Feb-2012, Ing. CIVILE)

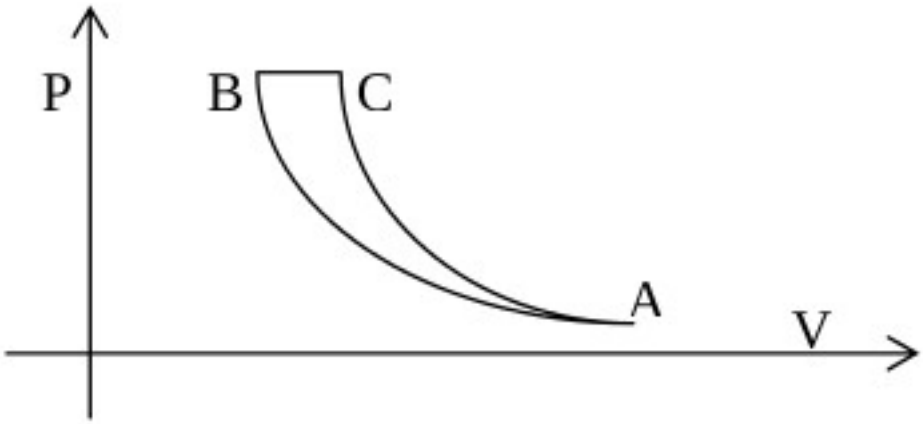
Il rendimento di una macchina termica che eroga una potenza di $P = 10\ kW$ è il 25%. Si assuma il processo reversibile. Calcolare la potenza ceduta dalla macchina per poter funzionare. Se la sorgente a temperatura più bassa è di $T_B = 15\ °C$, qual è la temperatura T_A della seconda sorgente per una macchina di Carnot con le medesime prestazioni?

1.6 Esercizio 6 (TE 1-Lug-2005, Ing. IND)

La temperatura interna di un frigorifero, che ha un'efficienza pari al 30% di quella ideale di Carnot, è $T_B = 4.5\ °C$. Quando la temperatura ambiente è $T_A = 30\ °C$, la potenza minima che il motore del frigorifero deve erogare per mantenere costante la temperatura interna è $P_L = 400\ W$. Calcolare la potenza dissipata dal frigorifero e la conducibilità media delle pareti del frigorifero (spessore medio delle pareti $\delta = 3\ cm$, area effettiva delle pareti conduttrici $A = 4\ m^2$).

1.7 Esercizio 7 (TE 30-Giu-2006, Ing. IND)

Una macchina termica funziona secondo il ciclo mostrato in figura: BC è una trasformazione isobara, CA un'adiabatica e AB un'isoterma. Si conoscono i valori di T_B , V_B , e T_C . Calcolare il rendimento η della macchina termica.



2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti alla bolla quando questa si trova nelle profondità del lago, si ricava il numero di moli di gas che la formano.

$$P_1 V_1 = nRT_1 \tag{2.1}$$

La pressione del gas all'interno della bolla deve contrastare quella dell'aria e dell'acqua che la sovrastano.

$$P_1 = P_{atm} + \rho g h \tag{2.2}$$

Da cui in numero delle moli:

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{(P_{atm} + \rho g h) V_1}{RT_1} \tag{2.3}$$

Utilizzando la stessa legge sul gas ormai emerso, quando su di esso grava unicamente la pressione dell'aria:

$$P_2 V_2 = nRT_2 \tag{2.4}$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_{atm}} = \frac{(P_{atm} + \rho g h) V_1 RT_2}{RT_1 P_{atm}} = \frac{(P_{atm} + \rho g h) T_2}{P_{atm} T_1} V_1 = 106\ cm^3 \tag{2.5}$$

2.2 Esercizio 2

Le uniche forze che agiscono sul pallone sono il peso e la spinta di Archimede. Per uguagliarle occorre tuttavia conoscere la massa di elio racchiusa nell'involucro. Si deve quindi innanzitutto scoprire il numero di moli di gas in esso contenute. Applicando l'equazione dei gas perfetti:

$$PV = nRT \tag{2.6}$$

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{2 \cdot 1.012 \cdot 10^5 \cdot 5}{8.31 \cdot 273} = 446\ mol \tag{2.7}$$

Conoscendo la massa di una singola mole, si può facilmente risalire alla massa totale:

$$m_{He} = n \cdot MM = 446 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1.784\ kg \tag{2.8}$$

Altro ingrediente necessario nella formula di Archimede è la densità del fluido in cui il pallone è immerso.

$$\rho_{aria} = 1.29\ g/l = 1.29\ g/dm^3 = 1.29\ kg/m^3 \tag{2.9}$$

Si può ora scrivere l'equazione delle forze sul pallone:

$$S_{Archi} = P \tag{2.10}$$

$$\rho_{aria} V g = (M + m_{He} + m_z)\, g \tag{2.11}$$

$$\rho_{aria} V - M - m_{He} = m_z \tag{2.12}$$

$$m_z = \rho_{aria} V - M - m_{He} = 1.29 \cdot 5 - 2 - 1.784 = 2.66\ kg \tag{2.13}$$

2.3 Esercizio 3

Il sistema è isolato: tutto il calore ceduto dal gas viene assorbito dal ghiaccio. Inoltre, durante il passaggio di stato, la temperatura del sistema rimane costante al valore $T = 273\ K$. Per il primo principio della termodinamica, l'intero lavoro compiuto sul sistema si trasforma in calore.

$$\begin{cases} Q = L + \Delta U \\ \Delta U = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

$$Q = L \tag{2.15}$$

Quindi il differenziale del calore ceduto dal gas è $dQ = PdV$. Per la legge di stato dei gas perfetti, il differenziale di volume può essere scritto in funzione della sola pressione:

$$V = \frac{nRT}{P} \tag{2.16}$$

$$dV = -\frac{nRT}{P^2}dP \tag{2.17}$$

Di conseguenza, l'elemento di calore è:

$$dQ = -P \cdot \frac{nRT}{P^2}dP = -\frac{nRT}{P}dP \tag{2.18}$$

Il calore totale scambiato dal gas si ottiene integrando l'espressione precedente:

$$Q_{gas} = \int_{P_{iniz}}^{P_{fin}} dQ = \int_{P_{iniz}}^{P_{fin}} -\frac{nRT}{P}dP = -nRT \ln \frac{P_{fin}}{P_{iniz}} \tag{2.19}$$

Questo deve essere esattamente uguale al calore ceduto dal ghiaccio durante la fusione:

$$Q_{fusione} = -L_f m \tag{2.20}$$

Il sego negativo è richiesto dalla convenzione che prevede che il calore assorbito sia positivo, a differenza di quello ceduto.
Imponendo l'uguaglianza tra il calore ceduto dal gas e quello assorbito dal ghiaccio:

$$Q_{gas} = Q_{ghiaccio} \tag{2.21}$$

$$-nRT \ln \frac{P_{fin}}{P_{iniz}} = -L_f m \tag{2.22}$$

$$\ln \frac{P_{fin}}{P_{iniz}} = \frac{L_f m}{nRT} \tag{2.23}$$

$$\frac{P_{fin}}{P_{iniz}} = e^{\frac{L_f m}{nRT}} \tag{2.24}$$

$$P_{fin} = P_{iniz} e^{\frac{L_f m}{nRT}} \simeq 2.1\ atm \tag{2.25}$$

2.4 Esercizio 4

La trasformazione del gas è un'espansione isoterma, in quanto il liquido mantiene il gas a temperatura costante. Di conseguenza, l'energia interna, che dipende solo dalla temperatura, rimane invariata. Tutto il calore assorbito si trasforma in lavoro:

$$Q = L + \Delta U = L \tag{2.26}$$

Dal momento che non sono presenti forze dissipative, tutto il lavoro compiuto dal gas si trasforma in energia potenziale elastica, determinando una compressione della molla:

$$Q = L = U_{el} = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\Delta V}{A}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{V_2 - V_1}{A}\right)^2 \tag{2.27}$$

La variazione di entropia è quella di una trasformazione isoterma reversibile:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}k\left(\frac{V_2 - V_1}{A}\right)^2}{T} \tag{2.28}$$

2.5 Esercizio 5

In ogni macchina termica parte del calore assorbito viene trasformato in lavoro, mentre il rimanente viene ceduto alla sorgente fredda.

$$Q_{ass} = L + Q_{ced} \tag{2.29}$$

Dividendo entrambi i membri per uno stesso intervallo di tempo si ottiene una relazione simile per la potenze:

$$\frac{Q_{ass}}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} + \frac{Q_{ced}}{\Delta t} \tag{2.30}$$

$$P_{ass} = P_L + P_{ced} \tag{2.31}$$

Il rendimento è, per definizione, il rapporto tra lavoro erogato e calore assorbito:

$$\eta = \frac{P_L}{P} = 0.25 \tag{2.32}$$

Si può quindi ricavare la potenza termica assorbita dalla macchina:

$$P = \frac{P_L}{\eta} = \frac{10^4}{0.25} = 40\ kW \tag{2.33}$$

In una macchina di Carnot, inoltre, il rendimento è dato dalla formula:

$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A} \tag{2.34}$$

Quindi:

$$1 - \frac{T_B}{T_A} = 0.25 \tag{2.35}$$

$$\frac{T_B}{T_A} = 0.75 \tag{2.36}$$

$$T_A = \frac{T_B}{0.75} = \frac{288}{0.75} = 384\ K = 111\ ^\circ C \tag{2.37}$$

Si ricordi che tutte le formule relative alle macchine termiche richiedono temperature in Kelvin.

2.6 Esercizio 6

Il COP di un frigorifero ideale può essere ricavato dalle temperature entro le quali esso lavora:

$$COP_{Carnot} = \frac{T_B}{T_A - T_B} \tag{2.38}$$

La macchina reale ha un rendimento pari ad una frazione di quello ideale:

$$COP_{reale} = 0.3 COP_{Carnot} = 0.3 \cdot \frac{277}{303 - 277} \simeq 3.2 \tag{2.39}$$

Il COP di un frigorifero è pari al rapporto tra il calore estratto ed il lavoro utilizzato:

$$COP = \frac{Q_{ass}}{L} \tag{2.40}$$

La stessa definizione vale se si considerano potenze. È infatti sempre possibile dividere numeratore e denominatore per lo stesso intervallo di tempo.

$$COP = \frac{P_{ass}}{P_L} \tag{2.41}$$

Da cui:

$$P_{ass} = COP \cdot P_L \tag{2.42}$$

La potenza termica immessa nell'ambiente, ovvero dissipata, è pari alla somma tra la potenza estratta dall'interno del frigorifero e quella fornita dal motore:

$$P_{ced} = P_L + P_{ass} = P_L\,(1 + COP) = 1740\ W \tag{2.43}$$

Affinché la temperatura dell'ambiente interno si mantenga costante, la totalità della potenza termica estratta dalla macchina deve rientrare per conduzione attraverso le pareti. Il calore trasmesso per conduzione, secondo la formula di Fourier, vale:

$$Q = \frac{kA\Delta T\Delta t}{\delta} \tag{2.44}$$

Dove con k si indica la conducibilità, con A la superficie di conduzione e con δ lo spessore della parete. La potenza si ottiene dividendo per l'intervallo di tempo arbitrario Δt:

$$P = \frac{kA\Delta T}{\delta} = P_{ass} \tag{2.45}$$

$$k = \frac{P_{ass}\delta}{A\left(T_A - T_B\right)} = 0.38\ W/mK \tag{2.46}$$

2.7 Esercizio 7

Conviene calcolare il rendimento come rapporto tra il lavoro compiuto e il calore erogato:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} \tag{2.47}$$

Si analizza una trasformazione alla volta e poi si sommano i contributi. Per quanto riguarda la trasformazione isobara BC, essa avviene alla pressione

$$p_B = p_C = \frac{nRT_B}{V_b} \tag{2.48}$$

Il lavoro compiuto è:

$$L_{BC} = nR\left(T_C - T_B\right) \tag{2.49}$$

Mentre il calore assorbito è:

$$Q_{BC} = nc_p\left(T_C - T_B\right) \tag{2.50}$$

Nel punto C la temperatura e la pressione sono note. Si può quindi ricavare il volume del gas:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{nRT_C}{\frac{nRT_B}{V_b}} = \frac{T_C}{T_B}V_B \tag{2.51}$$

La trasformazione adiabatica, per definizione, avviene senza scambio di calore. Tutto il lavoro viene compiuto a spese dell'energia interna del gas.

$$Q_{CA} = 0 \tag{2.52}$$

$$L_{CA} = -\Delta U_{CA} = -nc_V\left(T_A - T_C\right) \tag{2.53}$$

La trasformazione adiabatica, inoltre, segue la legge:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \tag{2.54}$$

Quindi, ricordando che AB è un'isoterma, e utilizzando la relazione ricavata in 2.48, si ha:

$$V_A = \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_C = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{T_C}{T_B}\right) V_B = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_B \tag{2.55}$$

L'ultima trasformazione è isoterma, la variazione di energia interna del gas è quindi nulla e tutto il calore assorbito si tramuta in lavoro:

$$Q_{ced} = L_{AB} = nRT_B \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_B \ln\frac{V_B}{\left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_B} = nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \tag{2.56}$$

Dal momento che la trasformazione procede da destra verso sinistra nel piano $P-V$, il lavoro è negativo ed il calore ceduto: pertanto non viene conteggiato al fine del calcolo del rendimento. In conclusione, sommando i contributi delle singole trasformazioni:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR\left(T_C - T_B\right) - nc_V\left(T_A - T_C\right) = \tag{2.57}$$

$$= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nR\left(T_C - T_B\right) + nc_V\left(-T_B + T_C\right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nc_P\left(T_C - T_B\right)$$

$$Q_{ass} = Q_{assAB} + Q_{assBC} + Q_{assCA} = 0 + nc_p\left(T_C - T_B\right) + 0 = nc_p\left(T_C - T_B\right) \tag{2.58}$$

Quindi il rendimento è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} == \frac{-\frac{\gamma}{\gamma-1} nRT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) + nc_P\left(T_C - T_B\right)}{nc_p\left(T_C - T_B\right)} = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_B \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right)}{c_p\left(T_C - T_B\right)} \tag{2.59}$$