Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

20 febbraio 2015

1 Fluidi

1.1 Esercizio 1

Un corpo cilindrico di altezza $h = 10\ cm$ galleggia in un recipiente parzialmente riempito di mercurio ($\rho_{Hg} = 13.6\ g/cm^3$), rimanendo immerso per metà della sua altezza. Si aggiunge poi acqua, fino a ricoprire la parte emersa del cilindro. Calcolare l'altezza della parte immersa nel mercurio nelle nuove condizioni.

1.2 Esercizio 2

Un contenitore cilindrico di raggio $r = 20\ cm$ e altezza $H = 80\ cm$ è completamente riempito di acqua. La parte superiore è aperta mentre su quella inferiore è presente un foro circolare di raggio $r_f = 5\ mm$. Calcolare il tempo necessario perché il serbatoio si svuoti completamente.

1.3 Esercizio 3 (TE 1-Lug-2005, Ing. IND)

Una cisterna di altezza $h = 2\ m$ è riempita d'acqua fino all'orlo. Improvvisamente si forma un piccolo foro sulla parete della cisterna e l'acqua comincia ad uscire. Sapendo che la distanza raggiunta dal getto d'acqua è $l = 1m$, calcolare i possibili valori dell'altezza del foro rispetto al suolo e della velocità di fuoriuscita dell'acqua.

1.4 Esercizio 4 (TE 18-Lug-2005, Ing. IND)

Una piccola fontana da giardino manda un getto d'acqua verticale della portata $Q = 0.10\ l/s$ ad un'altezza di $h = 0.50m$. Qual è la velocità iniziale v del getto e qual è il raggio r del foro attraverso il quale fuoriesce l'acqua? Calcolare quale pressione P deve fornire la pompa della fontana (assumendo che sia posta appena sotto il getto in uscita).

1.5 Esercizio 5 (TE 15-Set-2005, Ing. IND)

Un uomo di massa $m = 70\ kg$ vuole sollevare un elefante di $M = 7000\ kg$ sfruttando una leva idraulica. Se il diametro del pistone su cui sta l'uomo è $d = 1\ m$, quale deve essere il minimo diametro D del pistone su cui mettere l'elefante? Si supponga che il dislivello iniziale sia di $h = 5\ m$. Qual è lo spostamento verticale h_u che deve compiere l'uomo per portarsi alla stessa quota dell'elefante?

2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Quando nel recipiente è presente solo mercurio, le uniche forze che agiscono sul corpo sono la gravità e la spinta di Archimede. All'equilibrio queste devono compensarsi.

$$P = S_{Archi} \tag{2.1}$$

$$mg = \rho_{Hg} V_{immerso} g \tag{2.2}$$

Il volume di un cilindro è dato dal prodotto dall'area di base A per l'altezza h.o

$$\rho_{cil} A h g = \rho_{Hg} A \frac{h}{2} g \tag{2.3}$$

$$\rho_{cil} = \frac{\rho_{Hg}}{2} \tag{2.4}$$

Quando si aggiunge acqua, anche questa esercita sul cilindro una spinta verso l'alto:

$$P = S_{Hg} + S_{Acqua} \tag{2.5}$$

$$mg = \rho_{Hg} V_{Hg} g + \rho_{Acqua} V_{Acqua} g \tag{2.6}$$

Dove si indica con V_{Hg} il volume del cilindro immerso nel mercurio e con V_{Acqua} la parte sospesa in acqua.

$$\rho_{cil} A h g = \rho_{Hg} A h_{Hg} g + \rho_{Acqua} A h_{Acqua} g \tag{2.7}$$

$$\rho_{cil} h = \rho_{Hg} h_{Hg} + \rho_{Acqua} h_{Acqua} \tag{2.8}$$

Se il corpo è interamente ricoperto dal liquido, $h_{Hg} + h_{Acqua} = h$. Da cui: $h_{Acqua} = h - h_{Hg}$. Inserendo nell'equazione precedente questa informazione e la densità del corpo, si ottiene:

$$\frac{\rho_{Hg}}{2} h = \rho_{Hg} h_{Hg} + \rho_{Acqua} \left(h - h_{Hg}\right) \tag{2.9}$$

Risolvendo rispetto all'unica incognita h_{Hg}:

$$\frac{\rho_{Hg}}{2} h - \rho_{Acqua} h = \rho_{Hg} h_{Hg} - \rho_{Acqua} h_{Hg} \tag{2.10}$$

$$h_{Hg} = \frac{\left(\frac{\rho_{Hg}}{2} - \rho_{Acqua}\right) h}{\rho_{Hg} - \rho_{Acqua}} = \frac{\left(\frac{13600}{2} - 1000\right) \cdot 0.1}{13600 - 1000} = 0.046\ m = 4.6\ cm \tag{2.11}$$

Si è tenuto conto del fatto che occorre sempre utilizzare la densità in kg/m^3 e la conversione da impiegare è:

$$\rho \left[\frac{kg}{m^3}\right] = 1000 \cdot \rho \left[\frac{g}{cm^3}\right] \tag{2.12}$$

2.2 Esercizio 2

Si calcola innanzitutto la velocità con cui l'acqua esce dal foro. Si applica l'equazione di Bernoulli al pelo dell'acqua e alla superficie del foro, supponendo che la velocità con cui cala il livello nel serbatoio sia trascurabile rispetto alla velocità di uscita del liquido nel foro.

$$P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = cost. \tag{2.13}$$

$$P_{atm} + \rho g h + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \tag{2.14}$$

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.15}$$

Sfruttando la definizione di portata, si può affermare che la variazione del volume del liquido presente nel serbatoio è uguale alla portata uscente dal foro:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{out} \tag{2.16}$$

Il volume di acqua presente nel cilindro è

$$V = Ah = \pi r^2 h \tag{2.17}$$

La portata uscente si scrive:

$$Q_{out} = A_{foro} v = \pi r_f^2 \cdot \sqrt{2gh} \tag{2.18}$$

Si può ora risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 h\right) = \pi r_f^2 \cdot \sqrt{2gh} \tag{2.19}$$

$$\frac{r^2 dh}{r_f^2 \sqrt{2gh}} = dt \tag{2.20}$$

$$\int_0^T dt = \frac{r^2}{r_f^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh \tag{2.21}$$

$$\int_0^T dt = \frac{r^2}{r_f^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 h^{-\frac{1}{2}}\, dh \tag{2.22}$$

$$[t]_0^T = \frac{r^2}{r_f^2 \sqrt{2g}} \left[2h^{\frac{1}{2}}\right]_H^0 \tag{2.23}$$

$$T = \frac{2r^2}{r_f^2 \sqrt{2g}} \sqrt{H} = 650\ s \tag{2.24}$$

2.3 Esercizio 3

Una volta uscito dal foro, il getto d'acqua può essere considerato alla stregua di un proiettile che compie una traiettoria parabolica. Si calcola quindi la velocità iniziale, che è orizzontale rispetto al suolo; nelle seguenti equazioni, h_f rappresenta la quota del buco rispetto al suolo. Per l'equazione di Bernoulli:

$$P_{atm} + \rho g\left(h - h_f\right) = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{2.25}$$

$$v = \sqrt{2g\left(h - h_f\right)} \tag{2.26}$$

Per le leggi del moto di un proiettile sparato con velocità iniziale parallela all'asse x:

$$\begin{cases} x\left(t\right) = vt \\ y\left(t\right) = h_f - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.27}$$

Nel momento dell'impatto, si ha $x = l$ e $y = 0$.

$$\begin{cases} l = vt \\ 0 = h_f - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} t = \frac{l}{v} \\ h_f = \frac{1}{2}g\frac{l^2}{v^2} \end{cases} \tag{2.29}$$

Sostituendo l'espressione di v precedentemente ricavata nella seconda equazione:

$$h_f = \frac{1}{2}g\frac{l^2}{2g\left(h - h_f\right)} \tag{2.30}$$

$$4h_f\left(h - h_f\right) = l^2 \tag{2.31}$$

$$8h_f - 4h_f^2 = 1 \tag{2.32}$$

$$4h_f^2 - 8h_f + 1 = 0 \tag{2.33}$$

$$h_f = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{4} = 1.87\ m \vee 0.134\ m \tag{2.34}$$

Alle due possibili altezze del foro corrispondono due valori della velocità d'uscita dell'acqua $v = \sqrt{2g\,(h - h_f)}$:

$$\begin{cases} h_f = 1.87\ m \\ v = 1.61\ m/s^2 \end{cases} \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} h_f = 0.134\ m \\ v = 6.05\ m/s^2 \end{cases} \tag{2.36}$$

2.4 Esercizio 4

Per calcolare la velocità iniziale del getto si applica la legge di Bernoulli all'acqua appena fuoriuscita dalla fontana e all'apice della sua traiettoria:

$$P_{atm} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{2.37}$$

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.38}$$

Nota la velocità, è possibile ricavare il raggio dell'ugello da cui fuoriesce il getto a partire dalla portata.

$$Q = Av \tag{2.39}$$

$$Q = \pi r^2 \sqrt{2gh} \tag{2.40}$$

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi\sqrt{2gh}}} = \sqrt{\frac{10^{-4}}{\pi\sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5}}} = 3.2\ mm \tag{2.41}$$

Il valore numerico della portata deve essere espresso in m^3/s, mentre $1l = 1dm^3$.
La pressione che deve essere fornita dalla pompa è quella che serve a fornire al liquido la velocità iniziale calcolata in precedenza.

$$P = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{2.42}$$

$$P - P_{atm} = \frac{1}{2}\rho v^2 = 4.9\ kPa \tag{2.43}$$

2.5 Esercizio 5

Si sfrutta il principio di Pascal: la pressione applicata ad un punto di un liquido si trasmette inalterata a tutte le superfici a contatto con quel fluido:

$$P_{uomo} = \frac{mg}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = P_{elefante} = \frac{Mg}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} \tag{2.44}$$

$$\frac{mg}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{Mg}{\pi\frac{D^2}{4}} \tag{2.45}$$

$$\frac{m}{d^2} = \frac{M}{D^2} \tag{2.46}$$

$$D = \sqrt{\frac{d^2 M}{m}} = 10\ m \tag{2.47}$$

Per calcolare lo spostamento dell'uomo occorre notare che il circuito idraulico è chiuso, e che quindi il volume di liquido espulso dal pistone che sorregge la persona viene interamente assorbito da quello che sorregge l'elefante:

$$V_{uomo} = V_{elefante} \tag{2.48}$$

$$h_u \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (h - h_h)\,\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \tag{2.49}$$

$$h_u \pi \frac{d^2}{4} = h\pi\frac{D^2}{4} - h_h \pi \frac{D^2}{4} \tag{2.50}$$

$$h_u\left(d^2 + D^2\right) = hD^2 \tag{2.51}$$

$$h_u = \frac{D^2}{(d^2 + D^2)} h = 4.95\ m \tag{2.52}$$