# Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

19 febbraio 2015

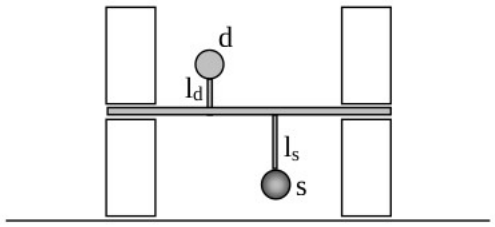
## 1 Oscillazioni

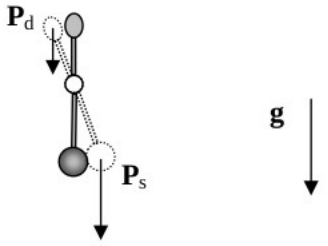
### 1.1 Esercizio 1 (TE 31-Gen-2012, Ing. IND)

Durante un terremoto le oscillazioni orizzontali del pavimento di una stanza provocano lo slittamento dei mobili. A scossa terminata senza apprezzabili danni, si misura che la forza orizzontale minima necessaria a spostare un pesante tavolo di massa $m = 200\ kg$ è $F = 800\ N$. Calcolare il coefficiente d'attrito statico $\mu$ tra il tavolo e il pavimento e l'ampiezza $A$ delle oscillazioni del pavimento supponendo il moto di tipo oscillatorio armonico con frequenza $f = 2.5\ Hz$.

### 1.2 Esercizio 2 (TE 27-Gen-2011, Ing. IND)

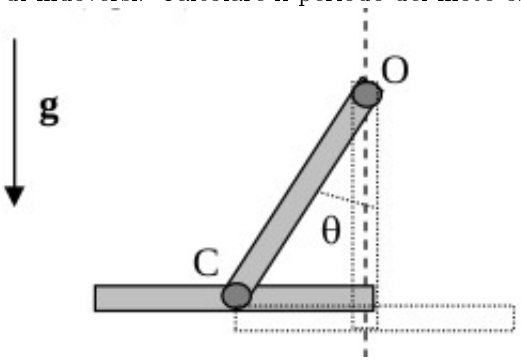
Un disco e una sfera piena di pari raggio $r$ e massa $m_d$ e $m_s$ sono rigidamente collegati con sbarrette di massa trascurabile e lunghezza $l_d$ e $l_s$ ad un'asta posta in orizzontale. L'asta è libera di ruotare attorno al suo asse con attrito trascurabile. Calcolare la frequenza delle oscillazioni del sistema quando la sfera viene scostata di poco dalla verticale. Siano $r = 10\ cm$, $m_d = 0.2\ kg$, $m_s = 1\ kg$, $l_s = 0.5\ m$, $l_d = 0.3\ m$.



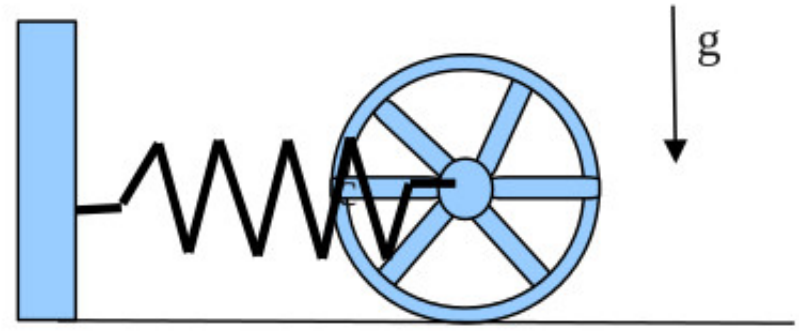

### 1.3 Esercizio 3 (TE 21-Lug-2010, Ing. IND)

All'estremità di un'asta rigida omogenea di massa $m$ e lunghezza $l = 1\ m$ appesa al soffitto è fissata una seconda asta omogenea uguale alla prima attraverso uno snodo. La prima asta può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O, mentre la seconda è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per lo snodo situato in corrispondenza del suo centro di massa C all'estremità inferiore della prima asta. Inizialmente le aste si trovano ferme nella posizione disegnata in figura e poi sono lasciate libere di muoversi. Calcolare il periodo del moto oscillatorio che segue nell'ipotesi di piccole oscillazioni.



## 1.4 Esercizio 4 (TE 29-Gen-2013, Ing IND)

Una ruota oscilla avanti e indietro, rotolando senza strisciare, guidata da una molla ideale orizzontale di costante elastica $k$ che ha un'estremità fissata sul mozzo della ruota e l'altra su una parete fissa. Calcolare il periodo delle oscillazioni. Schematizzare la ruota come se fosse composta da un anello di massa $m$ e raggio $r$ e da 6 aste di massa $m$ e lunghezza $r$.



# 2 Soluzioni

## 2.1 Esercizio 1

L'unica forza che agisce sul tavolo durante la scossa è l'attrito statico con la superficie.

$$F = F_{as} = \mu m g \tag{2.1}$$

Risolvendo rispetto all'unica incognita $\mu$:

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{800}{9.8 \cdot 200} \simeq 0.41 \tag{2.2}$$

La forza $F$ imprime al tavolo un'accelerazione

$$a = \frac{F}{m} \tag{2.3}$$

Ricordando che, in un moto armonico, l'ampiezza delle oscillazioni è correlata alla massima accelerazione dalla relazione:

$$a_{max} = A\omega^2 \tag{2.4}$$

Si ricava:

$$A = \frac{a}{\omega^2} = \frac{F}{m \cdot (2\pi f)^2} = \frac{800}{200 \cdot (2\pi \cdot 2.5)^2} \simeq 1.6\ cm \tag{2.5}$$

## 2.2 Esercizio 2

Il procedimento standard per il calcolo della frequenza delle piccole oscillazioni di un sistema prevede di ricostruire l'equazione differenziale del moto armonico: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ nel caso di traslazioni, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ nel caso di rotazioni. Si procede quindi a scrivere l'equazione dei momenti del sistema in questione:

$$\sum \tau = I\alpha = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2.6}$$

Si presentano due problemi: ricavare il momento d'inerzia del sistema e individuare tutti i momenti che agiscono su di esso. Per quanto riguarda il momento d'inerzia, occorre sommare i contributi del disco e della sfera. Le due aste che li uniscono all'asse di rotazione hanno infatti massa trascurabile. Sfruttando il teorema degli assi paralleli:

$$I_{sfera} = \frac{2}{5} m_s r^2 + m_s (l_s + r) \tag{2.7}$$

$$I_{disco} = \frac{1}{4} m_d r^2 + m_d (l_d + r) \tag{2.8}$$

Quindi:

$$I = I_{sfera} + I_{disco} = \frac{2}{5} m_s r^2 + m_s (l_s + r) + \frac{1}{4} m_d r^2 + m_d (l_d + r) \tag{2.9}$$

Per rispettare il segno negativo dell'equazione del moto armonico, occorre considerare un istante in cui il verso della forza di richiamo sia opposto a quello del moto. Con riferimento alla figura mostrata nella traccia, si suppone che la sfera stia salendo. Di conseguenza il momento della forza di gravità applicata al disco è concorde con tale spostamento, mentre quello del peso della sfera si oppone ad esso. Ricordando che $\tau = r \times F = rF \sin\theta$:

$$\sum \tau = m_d g (l_d + r) \sin\theta - m_s g (l_s + r) \sin\theta = (m_d g (l_d + r) - m_s g (l_s + r)) \sin\theta \tag{2.10}$$

Si ritorna ora all'equazione 2.6, evitando di esplicitare $I$ per semplicità.

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = (m_d g (l_d + r) - m_s g (l_s + r)) \sin\theta \tag{2.11}$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni è lecito approssimare il seno con il suo sviluppo di MacLaurin del primo ordine:

$$\sin\theta \sim \theta \tag{2.12}$$

Quindi:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = (m_d g (l_d + r) - m_s g (l_s + r)) \theta \tag{2.13}$$

Raccogliendo un meno a secondo membro e dividendo per $I$ si ricostruisce l'equazione del moto armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{(-m_d g\,(l_d + r) + m_s g\,(l_s + r))}{I}\theta \tag{2.14}$$

Ora il coefficiente di $\theta$, a meno del segno, è pari alla pulsazione al quadrato:

$$\omega^2 = \frac{(-m_d g\,(l_d + r) + m_s g\,(l_s + r))}{I} \tag{2.15}$$

Da cui la frequenza delle oscillazioni:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_s g\,(l_s + r) - m_d g\,(l_d + r)}{\frac{2}{5}m_s r^2 + m_s\,(l_s + r) + \frac{1}{4}m_d r^2 + m_d\,(l_d + r)}} = 2\ Hz \tag{2.16}$$

## 2.3 Esercizio 3

Il procedimento è analogo a quello descritto nell'esercizio 2.2. Prima di procedere al calcolo del momento d'inerzia del sistema è utile notare come tutti i punti della seconda asta si muovano con la stessa velocità lineare del centro di massa. Questa può quindi essere ridotta ad un punto materiale fissato ad un estremo della prima barra.

$$I = I_{asta} + I_{punto} = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 \tag{2.17}$$

Ora si scrive l'equazione dei momenti. Questi sono causati dal peso dell'asta e del punto materiale:

$$\sum \tau = I\alpha \tag{2.18}$$

$$I\alpha = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - mgl\sin\theta = -\frac{3}{2}mgl\sin\theta \tag{2.19}$$

Ipotizzando piccole oscillazioni è possibile ricostruire l'equazione caratteristica del moto armonico:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{2}mgl\theta \tag{2.20}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3mgl}{2I}\theta \tag{2.21}$$

Si può quindi stabilire la pulsazione e il periodo delle oscillazioni:

$$\omega^2 = \frac{3mgl}{2I} = \frac{3mgl}{2 \cdot \frac{4}{3}ml^2} = \frac{9g}{8l} \tag{2.22}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9g}{8l}} \tag{2.23}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{9g}{8l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{8g}{9l}} = 1.9\ s \tag{2.24}$$

## 2.4 Esercizio 4

Medesima strategia impiegata negli esercizi precedenti, con l'unica differenza che le oscillazioni sono traslazionali, quindi si mira a ricostruire l'equazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. Si scrivono quindi le equazioni delle forze e dei momenti che interessano la ruota, ipotizzando che questa si stia muovendo verso destra. Si indica con $a_{cm}$ l'accelerazione del centro di massa della ruota.

$$\begin{cases} \sum F = Ma_{cm} \\ \sum \tau = I\alpha \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} -kx - F_{as} = 7ma_{cm} \\ F_{as}r = I\alpha \end{cases} \tag{2.26}$$

Il momento d'inezia del corpo è la somma di quello di un anello che ruota intorno al suo asse e di sei aste vincolate ad un estremo:

$$I = mr^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} mr^2 = 3mr^2 \tag{2.27}$$

Inoltre, sotto l'ipotesi di rotolamento puro vale la relazione:

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{r} \tag{2.28}$$

Quindi:

$$\begin{cases} -kx - F_{as} = 7ma_{cm} \\ F_{as} r = 3mr^2 \cdot \frac{a_{cm}}{r} \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} -kx - 3ma_{cm} = 7ma_{cm} \\ F_{as} = 3ma_{cm} \end{cases} \tag{2.30}$$

Mantenendo solo la prima equazione:

$$10ma_{cm} = -kx \tag{2.31}$$

$$a_{cm} = -\frac{k}{10m} x \tag{2.32}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{10m} x \tag{2.33}$$

Quindi:

$$\omega^2 = \frac{k}{10m} \tag{2.34}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{10m}{k}} \tag{2.35}$$