Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

18 febbraio 2015

1 Quantità di moto e urti

1.1 Esercizio 1

Un carrello di massa $M = 120\ kg$ è fermo sulle rotaie. Un uomo di massa $m = 60\ kg$ corre alla velocità $v_i = 4\ m/s$, salta sul carrello e si ferma grazie alla forza d'attrito. Il coefficiente d'attrito dinamico tra la gomma delle suole ed il metallo del fondo del carrello è $\mu = 0.4$.

1. Calcolare la velocità finale v_f del carro.
2. Determinare l'intensità dell'attrito che consente all'uomo di arrestarsi.
3. Indicare il tempo in cui la forza d'attrito agisce.
4. Calcolare lo spostamento della persona rispetto al suolo, dall'istante in cui atterra sul carrello a quello in cui assume velocità nulla rispetto ad esso.
5. Stabilire se l'urto tra persona e carrello è elastico.

1.2 Esercizio 2

Un proiettile di massa m colpisce a velocità v una massa M appesa ad un perno tramite una fune sottile di lunghezza l. Si rileva che la velocità del proiettile dopo l'urto si riduce della metà. Determinare la minima velocità iniziale v_{min} necessaria affinché la massa compia un giro completo intorno al perno.

1.3 Esercizio 3 (TE 14-Feb-2013, Ing. CIVILE)

Due corpi di massa $m_1 = 20\ kg$ e $m_2 = 80\ kg$ si scontrano arrivando con la stessa velocità di $v_i = 10\ m/s$ ma da direzioni diverse nel piano, essendo l'angolo fra v_1 e v_2 pari a $\theta = 20°$. Dopo l'urto rimangono uniti. Calcolare il vettore velocità dopo l'urto e l'energia dissipata nell'urto.

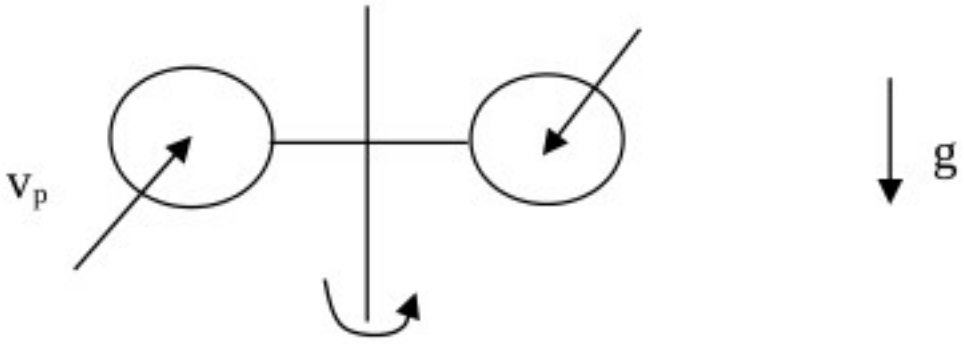
1.4 Esercizio 4 (TE 18-Lug-2005, Ing. IND)

Un'asticella lunga e sottile è vincolata a ruotare attorno al suo centro di massa su un piano orizzontale privo di attriti. Si indichi con l la sua lunghezza, con m la sua massa e con ω_0 la sua velocità angolare. Una pallina di massa $\frac{m}{5}$ e raggio trascurabile, cade verticalmente dall'alto e rimane appiccicata ad un estremo dell'asticella. Determinare la velocità angolare dell'asta ω_f dopo l'urto.

1.5 Esercizio 5 (TE 21-Feb-2013, Ing IND)

Due dischi di uguale massa m e raggio r sono saldati agli estremi di un'asta omogenea orizzontale di lunghezza $2r$ e massa m_a che e' posta in rotazione attorno ad un asse verticale passante per il suo centro di massa a velocità angolare costante ω_0 in senso antiorario. Ad un certo istante due proiettili di massa m_p e velocità v_p colpiscono e si conficcano nel centro di ciascuno dei dischi. Sapendo che nell'istante dell'urto la velocità dei proiettili è ortogonale alla superficie dei dischi e ha il verso indicato in figura calcolare la velocità angolare del

sistema dopo l'urto.



2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Si utilizzeranno il principio di conservazione della quantità di moto ed il teorema dell'impulso.

1. Conservazione quantità di moto:
$$mv_i = (m+M)\, v_f \tag{2.1}$$
$$v_f = \frac{m}{m+M} v_i = 1.33\ m/s \tag{2.2}$$

2. Formula della forza d'attrito:
$$F_{ad} = \mu N = \mu m g = 235\ N \tag{2.3}$$

3. Teorema dell'impulso:
$$F\Delta t = m\Delta v \tag{2.4}$$
$$\Delta t = \frac{Mv_f - 0}{F_{ad}} = 0.68\ s \tag{2.5}$$

4. Per il principio di composizione degli spostamenti $\Delta x_{uomo-suolo} = \Delta x_{uomo-carro} + \Delta x_{carro-suolo}$. Sia il moto della persona che quello del carrello sono uniformemente accelerati a causa dell'azione della forza d'attrito, che arresta l'uomo e mette in moto il carro.
Nel caso della persona rispetto al carro:
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_i}{\Delta t} \tag{2.6}$$
Di conseguenza:
$$\Delta x_{uomo-carro} = v_i \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 = v_i \Delta t - \frac{1}{2} \frac{v_i}{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{1}{2} v_i \Delta t = 1.4\ m \tag{2.7}$$
Per quel che concerne il carro rispetto al suolo:
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - 0}{\Delta t} \tag{2.8}$$
Di conseguenza:
$$\Delta x_{carro-suolo} = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} \frac{v_f}{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{1}{2} v_f \Delta t = 0.44\ m \tag{2.9}$$
In definitiva:
$$\Delta x_{uomo-suolo} = \Delta x_{uomo-carro} + \Delta x_{carro-suolo} = 1.84\ m \tag{2.10}$$

5. L'urto è elastico se si conserva l'energia cinetica:
$$\Delta K = \Delta K_{uomo} + \Delta K_{carro} = 0 \tag{2.11}$$
$$\Delta K_{uomo} = \frac{1}{2} m_p \left(v_f^2 - v_i^2\right) = -420\ J \tag{2.12}$$
$$\Delta K_{carro} = \frac{1}{2} M \left(v_f^2 - 0\right) = 120\ J \tag{2.13}$$
La risposta è quindi negativa.

2.2 Esercizio 2

La condizione necessaria affinché il corpo completi un giro è che la tensione del filo nel punto più alto sia maggiore o uguale a zero. Si indica con v_{up} la velocità tangenziale della massa nel punto più alto della traiettoria.

$$P + T = m\frac{v_{up}^2}{l} \tag{2.14}$$

$$T = m\frac{v_{up}^2}{l} - mg \geq 0 \tag{2.15}$$

$$v_{up} \geq \sqrt{gl} \tag{2.16}$$

Occorre ora riportare la condizione su v_{down}, la velocità del blocco nell'istante successivo all'urto. Conservazione dell'energia meccanica sulla massa M:

$$\frac{1}{2}Mv_{down}^2 = Mg2l + \frac{1}{2}Mv_{up}^2 \tag{2.17}$$

Inserendo la condizione 2.16 nell'equazione precedente:

$$\frac{1}{2}Mv_{down}^2 \geq Mg2l + \frac{1}{2}Mgl \tag{2.18}$$

$$v_{down} \geq \sqrt{5gl} \tag{2.19}$$

Si considera l'urto tra il corpo e il proiettile e si applica il principio della conservazione della quantità di moto.

$$mv = Mv_{down} + m\frac{v}{2} \tag{2.20}$$

$$v_{down} = \frac{m}{M} \cdot \frac{v}{2} \tag{2.21}$$

Imponendo la condizione precedentemente ottenuta:

$$\frac{mv}{2M} \geq \sqrt{5gl} \tag{2.22}$$

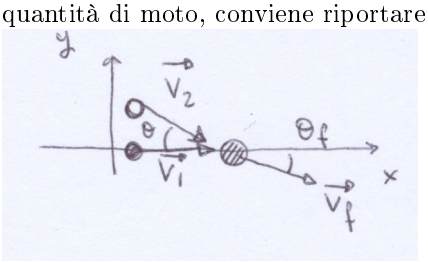
$$v \geq \frac{2M\sqrt{5gl}}{m} \tag{2.23}$$

La minima velocità accettabile è quindi:

$$v_{min} = \frac{2M\sqrt{5gl}}{m} \tag{2.24}$$

2.3 Esercizio 3

Dal momento che si rende necessaria l'applicazione della forma vettoriale del principio di conservazione della quantità di moto, conviene riportare sul piano cartesiano i vettori velocità v_1 e v_2.



Se si considera v_1 sull'asse delle ascisse, v_2 forma con esso un angolo θ. Scomponendo i due vettori secondo le direzioni parallele agli assi:

$$\begin{cases} v_1 = v\hat{i} \\ v_2 = v\cos\theta\hat{i} + v\sin\theta\hat{j} \end{cases} \tag{2.25}$$

Si può ora applicare la conservazione della quantità di moto:

$$(m_1 + m_2)\, v_f = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{2.26}$$

$$(m_1 + m_2)\, v_f = m_1 v\hat{i} + m_2 \left(v\cos\theta\hat{i} - v\sin\theta\hat{j} \right) \tag{2.27}$$

$$v_f = \frac{(m_1 + m_2\cos\theta)\,\hat{i} - m_2\sin\theta\hat{j}}{m_1 + m_2} \cdot v \tag{2.28}$$

$$\overrightarrow{v}_f = \frac{(20 + 80\cos 20^\circ)\,\hat{i} - 80\sin 20^\circ\hat{j}}{100} \cdot v = 9.52\hat{i} - 2.74\hat{j}\ m/s \tag{2.29}$$

Il modulo del vettore velocità finale viene ottenuto tramite il teorema di Pitagora:

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{9.52^2 + 2.74^2} = 9.9\ m/s \tag{2.30}$$

L'energia dissipata è:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_f^2 = 93.1\ J \tag{2.31}$$

2.4 Esercizio 4

Si applica il principio di conservazione del momento angolare, l'equivalente della quantità di moto nella dinamica rotazionale.

$$L_i = L_f \tag{2.32}$$

$$I_{sbarra}\omega_o = I_{sbarra+pallina}\omega_f \tag{2.33}$$

$$\omega_f = \frac{I_{sbarra}\omega_o}{I_{sbarra+pallina}} \tag{2.34}$$

Il momento d'inerzia della sola asta vincolata al centro di massa è:

$$I_{sbarra} = \frac{1}{12}ml^2 \tag{2.35}$$

La sfera viene invece considerata una massa puntiforme ("raggio trascurabile"), posta a distanza $\frac{l}{2}$ dal centro di rotazione.

$$I_{sbarra+pallina} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{5}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}ml^2 = \frac{2}{15}ml^2 \tag{2.36}$$

Quindi:

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{12}ml^2}{\frac{2}{15}ml^2} \cdot \omega_o = \frac{5}{8}\omega_0 \tag{2.37}$$

2.5 Esercizio 5

Sul sistema formato da dischi, asta e proiettile non agiscono forze esterne in grado di generare momenti. Si può quindi applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$L_i = L_f \tag{2.38}$$

Il momento angolare del sistema è la somma dei contributi dell'asta e dei dischi in rotazione e dei proiettili. Questi possono essere assimilati a masse puntiformi che, al momento dell'impatto, ruotano a distanza r dal centro del sistema con velocità angolare $\omega_p = \frac{v_p}{r}$.

$$L_i = I_{asta+dischi}\omega_0 + 2m_p r^2 \frac{v_p}{r} \tag{2.39}$$

Il momento d'inerzia del sistema formato da asta e dischi si ottiene sommando quello di una sbarra sottile che ruota intorno al suo centro di massa con quello dei due dischi. Quest'ultimo si calcola mediante il teorema degli assi paralleli, tenendo in considerazione il fatto che i dischi ruotano in verticale intorno ad un asse a distanza $2r$ dal centro di massa (metà della lunghezza dell'asta + un raggio del disco).

$$I_{asta} = \frac{1}{12}m_a(2r)^2 = \frac{1}{3}m_a r^2 \tag{2.40}$$

$$I_{disco} = \frac{1}{4}mr^2 + m(2r)^2 = \frac{17}{4}mr^2 \tag{2.41}$$

$$I_{asta+dischi} = I_{asta} + 2I_{disco} = \frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2 \tag{2.42}$$

Da cui:

$$L_i = \left(\frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2\right)\omega_0 + 2m_p r v_p \tag{2.43}$$

Il momento d'inerzia finale è invece:

$$L_f = I_{asta+dischi+proiettili}\omega_f \tag{2.44}$$

Dove il momento d'inerzia del sistema si ricava attraverso la formula:

$$I_{asta+dischi+proiettili} = \frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2 + 2m_p\,(2r)^2 = \frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2 + 8m_p r^2 \tag{2.45}$$

Si può ora risolvere l'equazione iniziale rispetto all'incognita ω_f.

$$\left(\frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2\right)\omega_0 + 2m_p r v_p = \left(\frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2 + 8m_p r^2\right)\omega_f \tag{2.46}$$

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2\right)\omega_0 + 2m_p r v_p}{\frac{1}{3}m_a r^2 + \frac{17}{2}mr^2 + 8m_p r^2} \tag{2.47}$$