Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

7 maggio 2015

1 Dinamica del corpo rigido

1.1 Esercizio 1

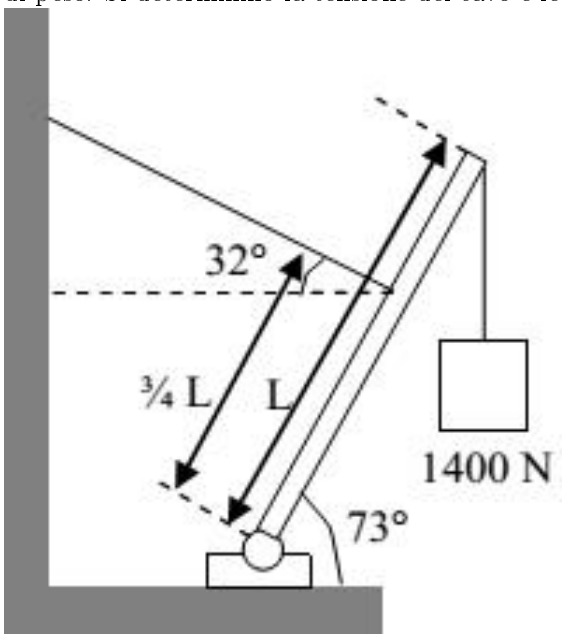
Si calcoli il momento d'inerzia di una sbarra sottile di lunghezza $l = 30\ cm$, la cui densità lineare di massa è descritta dalla funzione $\lambda(x) = 50 + 20x\ \left[\frac{g}{m}\right]$.

1.2 Esercizio 2

Uno yo-yo è approssimabile ad un cilindro di massa m e raggio r collegato ad una fune inestensibile e di massa trascurabile. Si calcoli l'accelerazione con cui cade il corpo ed il tempo impiegato per toccare il suolo, nell'ipotesi che l'altezza iniziale sia h.

1.3 Esercizio 3 (Simulazione di prova scritta, AA 2012-13, Ing. ELE-INFO-BIO)

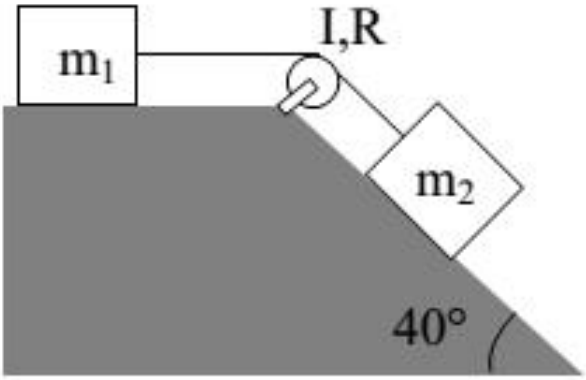
Una trave omogenea di peso $P_t = 1000\ N$ ha la sua estremità inferiore incernierata a terra ed è sorretta da un cavo, fissato a parete, come illustrato in figura. All'estremità superiore è appeso un oggetto di peso $P_o = 1400\ N$ di peso. Si determinino la tensione del cavo e le componenti della forza di reazione della cerniera sulla trave.



1.4 Esercizio 4 (Simulazione di prova scritta, AA 2012-13, Ing. ELE-INFO-BIO)

Due blocchi di massa $m_1 = 5\ kg$ e $m_2 = 9\ kg$ sono connessi fra loro da una corda senza massa tesa da una carrucola circolare di raggio $R = 0.25\ m$ e massa $M = 15\ kg$. I due blocchi scorrono lungo il profilo disegnato in figura: il lato destro del profilo è inclinato di $\theta = 40°$. Il coefficiente di attrito dinamico per i due blocchi è $\mu = 0.36$. Si determinino i valori di accelerazione dei due blocchi e le tensioni della corda sui due lati della

carrucola.



1.5 Esercizio 5 (TE 16-Feb-2012, Ing. CIVILE)

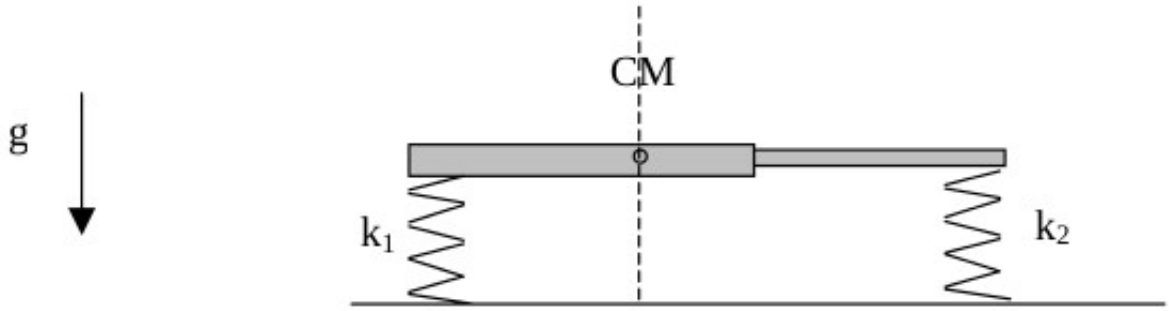
Un anello di acciaio di massa $m = 6\ kg$ e raggio $r = 1\ m$ può scendere lungo un piano inclinato. Si osserva che se l'angolo del piano inclinato con l'orizzontale supera $\theta_{max} = 20°$ non è più possibile un moto di puro rotolamento. Calcolare il coefficiente di attrito statico μ.

1.6 Esercizio 6 (TE 1-Lug-2005, Ing. IND)

Un'asta di metallo omogenea lunga $L = 1\ m$ è inizialmente in posizione verticale imperniata a terra ad un suo estremo. Ad un certo istante viene lasciata cadere. Calcolare la velocità tangenziale$v$ dell'altro estremo quando la sbarra forma con la verticale un angolo di $\theta = 60°$.

1.7 Esercizio 7 (TE 31-Gen-2012, Ing. IND)

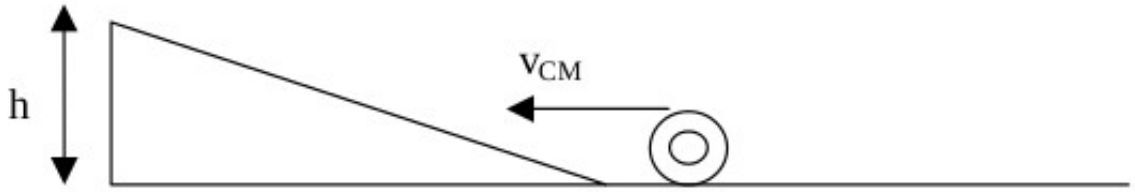
Una sbarra di alluminio lunga $L = 3\ m$, rigida e omogenea ha sezione $a_1 = 150\ cm^2$ per una lunghezza $l_1 = 1.8\ m$ e $a_2 = 100cm^2$ per una lunghezza $l_2 = 1.2\ m$. L'asta poggia agli estremi su due molle ideali verticali di costante elastica $k_1 = 5000\ N/m$ e k_2 . Le molle hanno la stessa lunghezza di riposo e il centro di massa dell'asta è libero di muoversi solo nella direzione verticale. Calcolare dove si trova il centro di massa dell'asta e il valore di k_2 perché all'equilibrio l'asta sia orizzontale.



1.8 Esercizio 8 (TE 31-Gen-2012, Ing. IND)

Il copertone della ruota di un prototipo di auto sportiva è assimilabile ad un cilindro cavo con raggio interno $r_i = 10\ cm$, raggio esterno $r_e = 20\ cm$ e altezza $h = 20\ cm$. Per caricare una partita di copertoni su un camion, un uomo li fa rotolare senza strisciare su per una rampa appoggiata sul piano di carico posto a $h = 80\ cm$ da

terra. Calcolare la velocità minima v_{min} da conferire al centro di massa dei copertoni per farli salire sul camion.



1.9 Esercizio 9 (Richiede doppi integrali)

Si dimostri che il momento d'inerzia di un disco cavo di massa m, raggio interno r_i e raggio esterno r_e è $I = \frac{1}{2}m\left(r_i^2 + r_e^2\right)$.

1.10 Esercizio 10 (TE 15-Set-2005, Ing. IND)

Un volano con momento d'inerzia $I = 1.5\ kg \cdot m^2$, ruota a 2000 giri al minuto. Se una coppia di momento $\tau(t) = 1.2\pi t^2\ Nm$ si oppone al moto, in quanto tempo si ferma il volano?

2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Si determina innanzitutto la massa complessiva dell'oggetto.

$$m = \int_0^l \lambda(x)\ dx = \int_0^l 50 + 20x\, dx = \left[50x + 10x^2\right]_0^l = 50l + 10l^2 = 50 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.3^2 \simeq 16\ g \tag{2.1}$$

La coordinata x del centro di massa è definita come:

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int_0^l x\, dm \tag{2.2}$$

Dove dm è l'elemento di massa e vale

$$dm = \lambda(x)\, dx \tag{2.3}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\int_0^l x\lambda(x)\ dx = \frac{1}{m}\int_0^l 50x + 20x^2\, dx = \frac{1}{m}\left[25x^2 + \frac{20}{3}x^3\right]_0^l = \\ &= \frac{1}{m}\left(25l^2 + \frac{20}{3}l^3\right) = \frac{1}{16}\left(25 \cdot 0.3^2 + \frac{20}{3} \cdot 0.3^3\right) \simeq 0.153\ m \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Esercizio 2

Si determina il momento d'inerzia del corpo:

$$I = I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2 \tag{2.5}$$

Poi si scrivono l'equazione delle forze e quella dei momenti:

$$\begin{cases} \sum F = ma \\ \sum \tau = I\alpha \end{cases} \tag{2.6}$$

Si sceglie di considerare positive le accelerazioni dirette verso il basso, e di conseguenza le accelerazioni angolari che tendono a far ruotare il corpo in senso orario. Si indica con T la tensione del filo. Questa è l'unica forza che produce un momento non nullo, in quanto il peso è applicato al centro di massa del corpo e ha quindi un braccio pari a zero. Il momento causato da T è:

$$\overrightarrow{\tau_T} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{T} \longrightarrow \tau_T = rT\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = rT \tag{2.7}$$

Quindi:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr = I\alpha \end{cases} \tag{2.8}$$

Dalla leggi del moto circolare, si ha $\alpha = \frac{a}{r}$.

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a}{r} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T = \frac{1}{2}ma \end{cases} \tag{2.10}$$

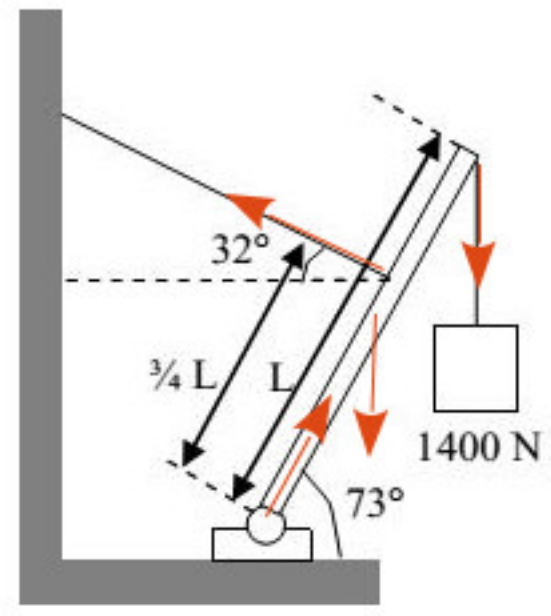
$$\begin{cases} mg - \frac{1}{2}ma = ma \\ T = \frac{1}{2}ma \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} mg = \frac{3}{2}ma \\ T = \frac{1}{2}ma \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}g \\ T = \frac{1}{3}mg \end{cases} \tag{2.13}$$

2.3 Esercizio 3

Si determinano tutte le forze agenti sulla trave.



Poi si impongono le condizioni di equilibrio del corpo rigido, scomponendo le forza lungo gli assi x e y.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum \tau = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Si indica con R la reazione normale fornita dal perno e con T la tensione cui è sottoposto il filo. La forza peso della trave viene considerata applicata al suo centro di massa, ovvero a $\frac{L}{2}$. Vengono considerate positive le forze concordi con l'orientazione degli assi cartesiani.

$$\begin{cases} R_x - T_x = 0 \\ R_y + T_y - P_t - P_o = 0 \\ P_o L \sin(90^\circ - 73^\circ) - T\frac{3}{4}L \cdot \sin(73^\circ + 32^\circ) + \frac{L}{2}P_t \sin(90^\circ - 73^\circ) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Nell'ultima equazione l'unica incognita è la tensione del filo:

$$T = \frac{(4P_o + 2P_t)\sin 17^\circ}{3\sin 105^\circ} = 766\ N \tag{2.16}$$

Da cui le componenti:

$$T_x = T\cos 32^\circ = 650\ N \tag{2.17}$$

$$T_y = T\sin 32^\circ = 406\ N \tag{2.18}$$

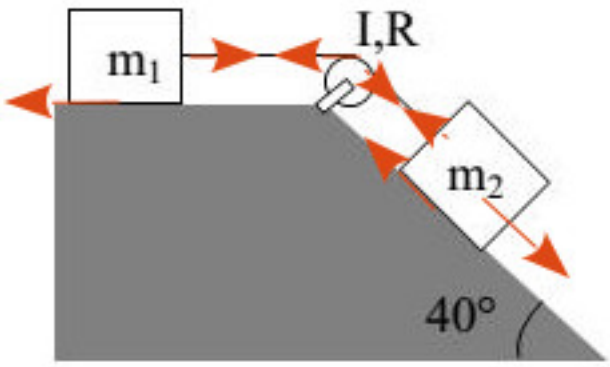
Risolvendo le prime due equazioni del sistema:

$$R_x = T_x = 766\ N \tag{2.19}$$

$$R_y = P_t + P_o - T_y = 1994\ N \tag{2.20}$$

2.4 Esercizio 4

Su ognuno dei due blocchi agisce la tensione della fune, la forza d'attrito e il peso. La carrucola è messa in rotazione dall'azione delle due tensioni.



Si ottengono quindi tre equazioni: due sulle forze agenti sui blocchi, una sui momenti della carrucola.

$$\begin{cases} \sum F_{m_1} = m_1 a \\ \sum F_{m_2} = m_2 a \\ \sum \tau_{carr} = I\alpha \end{cases} \tag{2.21}$$

L'accelerazione delle due masse è identica, essendo queste unite da una fune inestensibile. Inoltre si ricorda che $\alpha = \frac{a}{r}$, dove r è il raggio della puleggia. Questa è modellizzabile come un cilindro pieno, il cui momento d'inerzia è $I = \frac{1}{2}Mr^2$, con M massa dell'oggetto. Si definiscono le tensioni T_1e T_2, relative ai fili che collegano alla carrucola rispettivamente m_1 ed m_2. Il verso positivo dell'accelerazione è concorde con il verso positivo dell'asse delle x.

$$\begin{cases} T_1 - \mu_d m_1 g = m_1 a \\ m_2 g \sin\theta - T_2 - \mu_d m_2 g \cos\theta = m_2 a \\ rT_2 - rT_1 = \frac{1}{2}Mr^2 \cdot \frac{a}{r} \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} T_1 = \mu m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - m_2 a \\ T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \tag{2.23}$$

Sostituendo le tensioni nell'ultima equazione si ricava l'accelerazione.

$$m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - m_2 a - \mu m_1 g - m_1 a = \frac{1}{2}Ma \tag{2.24}$$

$$m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - \mu m_1 g = \frac{1}{2}Ma + m_2 a + m_1 a \tag{2.25}$$

$$a = \frac{m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - \mu m_1 g}{\frac{1}{2}M + m_2 + m_1} = 0.18\ m/s^2 \tag{2.26}$$

Da cui le altre due incognite:

$$T_1 = \mu m_1 g + m_1 a = 18.5\ N \tag{2.27}$$

$$T_2 = m_2 g \sin\theta - \mu_d m_2 g \cos\theta - m_2 a = 30.75\ N \tag{2.28}$$

2.5 Esercizio 5

Le forze che agiscono sull'anello sono: il peso P, la reazione normale N e la forza d'attrito statico F_{as}. Le prime due possono essere considerate applicate al centro di massa del corpo, quindi non provocano momento. L'ultima è tangente alla circonferenza, quindi genera un momento $\vec{\tau}_{as} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\frac{\pi}{2} = rF$. Le equazioni delle forze e dei momenti sono:

$$\begin{cases} \sum F = ma \\ \sum \tau = I\alpha \end{cases} \tag{2.29}$$

Si considerano positive le accelerazioni dirette verso la parte bassa del piano inclinato:

$$\begin{cases} P_{\parallel} - F_{as} = ma \\ F_{as} r = I\alpha \end{cases} \tag{2.30}$$

Il momento d'inerzia di un anello è $I = mr^2$ e, in regime di rotolamento puro, vale la relazione $\alpha = \frac{a}{r}$. Quindi:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{as} = ma \\ F_{as} r = mr^2 \cdot \frac{a}{r} \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\begin{cases} F_{as} = ma \\ mg\sin\theta = 2F_{as} \end{cases} \tag{2.32}$$

Di conseguenza, l'intensità della forza d'attrito statico varia in funzione di θ secondo la relazione:

$$F_{as} = \frac{mg\sin\theta}{2} \tag{2.33}$$

Tuttavia deve rispettare la condizione:

$$F_{as} \leq \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{2.34}$$

Quindi, imponendo che la forza d'attrito statico sia massima in corrispondenza del massimo angolo che permette rotolamento puro:

$$\mu mg\cos\theta_{max} = \frac{1}{2} mg\sin\theta_{max} \tag{2.35}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\tan\theta_{max} = \frac{1}{2}\tan 20^\circ = 0.18 \tag{2.36}$$

2.6 Esercizio 6

Si utilizza la conservazione dell'energia meccanica. Inizialmente l'asta, ferma, possiede solo energia potenziale. Si può ridurre il corpo esteso ad un punto materiale, la cui intera massa sia concentrata nel baricentro, ovvero ad un'altezza pari a $\frac{L}{2}$ rispetto al terreno. Quando invece l'asta raggiunge l'angolo θ, la quota del centro di massa è il cateto adiacente a θ del triangolo formato da perno, baricentro e proiezione del baricentro sulla verticale. A questa si aggiunge l'energia cinetica di rotazione.

$$E_i = E_f \tag{2.37}$$

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{2.38}$$

Il momento d'inerzia di una sbarra che ruota intorno ad un estremo è $I = \frac{1}{3}mL^2$. Quindi:

$$mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \tag{2.39}$$

$$\omega^2 = \frac{3g(1-\cos\theta)}{L} \tag{2.40}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} \tag{2.41}$$

Per le leggi del moto circolare, $v = \omega r$, dove r è la distanza dal centro di rotazione. Per l'estremo della sbarra $v = \omega L$

$$v = L\cdot\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} = \sqrt{3gL(1-\cos\theta)} = 3.83\ m/s \tag{2.42}$$

2.7 Esercizio 7

Nel calcolo del centro di massa, le singole sezioni della sbarra vengono ridotte a masse puntiformi concentrate nei baricentri dei tratti. La coordinata x del centro di massa di un sistema di corpi puntiformi è data dalla formula:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{2.43}$$

Tornando alla situazione in esame:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{m_1 + m_2} \tag{2.44}$$

Si indica con A la sezione di una parte di sbarra. Le masse dei due tratti sono:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho A_1 l_1 \tag{2.45}$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho A_2 l_2 \tag{2.46}$$

Sostituendo:

$$x_{cm} = \frac{\rho A_1 l_1 \frac{l_1}{2} + \rho A_2 l_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{\rho A_1 l_1 + \rho A_2 l_2} = \frac{A_1 \frac{l_1^2}{2} + A_2 l_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right)}{A_1 l_1 + A_2 l_2} = 1.36\ m \tag{2.47}$$

A questo punto è possibile impostare l'equazione dei momenti rispetto al centro di massa. La forza peso ha braccio nulla, quindi occorre tenere in considerazione solo la forza elastica esercitata dalle due molle. Affinché la barra sia in equilibrio, deve essere:

$$\sum \tau = 0 \tag{2.48}$$

$$x_{cm} k_1 \Delta x_1 - (l - x_{cm})\, k_2 \Delta x_2 = 0 \tag{2.49}$$

Inoltre l'asta è orizzontale se $\Delta x_1 = \Delta x_2$.

$$x_{cm} k_1 = (l - x_{cm})\, k_2 \tag{2.50}$$

$$k_2 = \frac{x_{cm}}{l - x_{cm}} k_1 = 4146\ N/m \tag{2.51}$$

2.8 Esercizio 8

Conviene ragionare sulle energie: nel punto più basso del piano inclinato il cilindro possiede sia energia cinetica di traslazione $K_t = \frac{1}{2}mv^2$ che energia cinetica di rotazione $K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$. Supponendo che il copertone arrivi in cima con velocità nella, una volta superato il piano inclinato possiede solo energia potenziale. Il momento d'inerzia di un cilindro cavo è $I = \frac{1}{2}m\left(r_i^2 + r_e^2\right)$: si veda a tal proposito l'esercizio successivo.

$$E_i = E_f \tag{2.52}$$

$$K_t + K_r = U_g \tag{2.53}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \tag{2.54}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\left(r_i^2 + r_e^2\right)\omega^2 = mgh \tag{2.55}$$

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}\left(r_i^2 + r_e^2\right)\omega^2 = gh \tag{2.56}$$

Se il copertone compie un moto di rotolamento puro, si ha $\omega = \frac{v}{r_e}$.

$$2v^2 + \frac{\left(r_i^2 + r_e^2\right)}{r_e^2} v^2 = 4gh \tag{2.57}$$

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{2 + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r_e^2}}} = 3.1\ m/s \tag{2.58}$$

2.9 Esercizio 9

La definizione di momento d'inerzia per un corpo bidimensionale è

$$I = \int_S r^2 \, dm \tag{2.59}$$

Considerando un disco cavo con centro nell'origine degli assi e densità superficiale di massa $\sigma(x, y)$, si ha:

$$I = \int\int_{disco\,cavo} x^2 + y^2 \, \sigma(x, y) \, dxdy \tag{2.60}$$

Supponendo $\sigma(x, y)$ costante su tutta la superficie:

$$I = \int\int_{disco\,cavo} x^2 + y^2 \, \sigma dxdy = \sigma \int\int_{disco\,cavo} x^2 + y^2 \, dxdy \tag{2.61}$$

Si opera ora la trasformazione in coordinate polari:

$$I = \sigma \int\int_{disco\,cavo} \rho^2 \, \rho d\rho d\theta \tag{2.62}$$

Con

$$r_i \leq \rho \leq r_e \tag{2.63}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{2.64}$$

Quindi:

$$I = \sigma \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \rho^3 \, d\rho d\theta = \sigma 2\pi \int_{r_i}^{r_e} \rho^3 \, d\rho = \sigma 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{r_i}^{r_e} = \frac{\sigma\pi}{2} \left(r_e^4 - r_i^4 \right) \tag{2.65}$$

Si scompone ora il termine tra parentesi:

$$I = \sigma\pi \left(r_e^2 - r_i^2 \right) \frac{\left(r_e^2 + r_i^2 \right)}{2} \tag{2.66}$$

Si riconosce inoltre che $\pi \left(r_e^2 - r_i^2 \right)$ rappresenta l'area della figura. Il prodotto tra questa e la densità superficiale fornisce la massa del corpo:

$$m = \sigma\pi \left(r_e^2 - r_i^2 \right) \tag{2.67}$$

In definitiva,

$$I = \frac{1}{2} m \frac{\left(r_e^2 + r_i^2 \right)}{2} \tag{2.68}$$

2.10 Esercizio 10

La velocità iniziale del volano è:

$$\omega_0 = 2000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 209.4 \, rad/s \tag{2.69}$$

Si ricava l'accelerazione angolare che agisce sul corpo:

$$\tau = I\alpha \tag{2.70}$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} \tag{2.71}$$

Si applica infine la definizione di accelerazione angolare e si risolve l'equazione differenziale a variabili separabili che si ottiene:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.72}$$

$$d\omega = \alpha dt \tag{2.73}$$

$$\int_{\omega_o}^{0} d\omega = \int_0^T \alpha dt \tag{2.74}$$

$$-\omega_0 = \int_0^T \frac{-1.2\pi t^2}{I} \, dt \tag{2.75}$$

$$\frac{1.2I\omega_0}{\pi} = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T \tag{2.76}$$

$$T^3 = \frac{3I\omega_0}{1.2\pi} \tag{2.77}$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{3I\omega_0}{1.2\pi}} = 6.3\ s \tag{2.78}$$