Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

15 febbraio 2015

1 Energia

1.1 Esercizio 1 (TE 22-Giu-2012, Ing. CIVILE)

Un pendolo è costituito da una massa $m = 1\ kg$ sostenuta da una fune di massa trascurabile lunga $l = 2\ m$, con costante elastica $k = 10^3\ Nm$, inizialmente disposta in orizzontale e in quiete. Calcolare l'allungamento x della corda quando il pendolo ha descritto un quarto di circonferenza ed m si trova nel punto più basso della traiettoria.

1.2 Esercizio 2 (TE 22-Feb-2012, Ing. EDILE)

Quanto tempo impiega un motore capace di erogare una potenza $P = 2.3\ kW$ per sollevare un carico $m = 200\ kg$ sino ad un'altezza $h = 20\ m$ dal suolo?

1.3 Esercizio 3

Un pendolo è composto da una fune inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile e da una sfera di massa m. Il pendolo, fissato al soffitto di una stanza, è inizialmente mantenuto in posizione orizzontale. Esattamente sulla verticale del punto in cui è imperniata la corda è posizionato un piolo inamovibile, la cui distanze dal soffitto è d. Quando il pendolo viene rilasciato e la corda incontra il piolo. Si dimostri che il minimo valore di d necessario a far compiere al pendolo un giro completo intorno al piolo è $d_0 = \frac{3}{5}l$.

1.4 Esercizio 4

Una massa $m_1 = 3\ kg$ è appoggiata su un piano orizzontale caratterizzato da un coefficiente d'attrito statico $\mu_s = 0.5$ e da un coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Una corda di massa trascurabile, libera di scorrere senza attrito su una carrucola, collega il primo blocco ad una seconda massa $m_2 = 5\ kg$, tenuta sospesa a mezz'aria. Al tempo $t = 0$ il sistema viene lasciato libero di muoversi. Dimostrare che il secondo blocca trascina il primo nella sua caduta e calcolare la velocità dei due blocchi quando m_2 è precipitato per $\Delta h = 1.5\ m$.

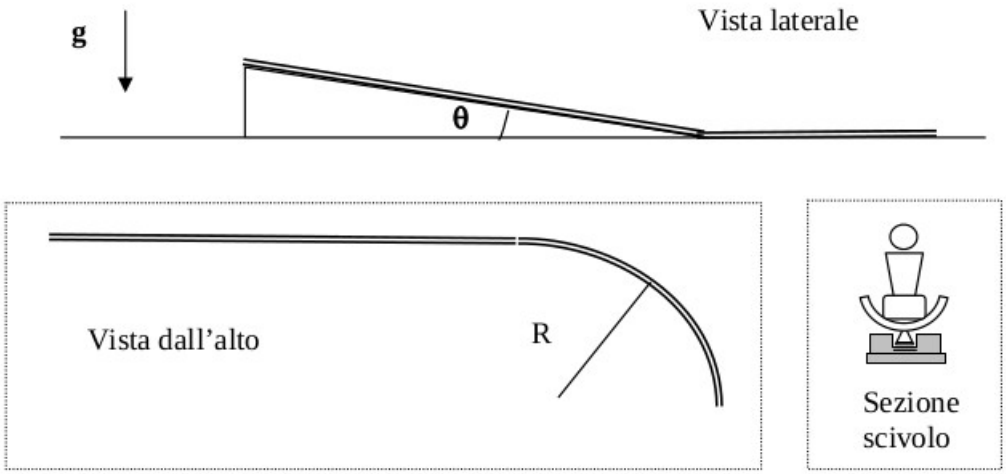
1.5 Esercizio 5 (TE 27-Gen-2011, Ing. IND)

Un ragazzo tira uno slittino lungo un pendio innevato lungo $l = 50\ m$ e inclinato di un angolo di $\theta = 20°$ rispetto all'orizzontale. Le condizioni del manto nevoso lungo il pendio non sono costanti a causa della differente esposizione al sole. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra la neve e lo slittino aumenta lungo il pendio secondo l'equazione $\mu(x) = ax^{\frac{3}{2}} + b$ calcolare il minimo lavoro che il ragazzo deve compiere per trascinare in cima alla salita il suo slittino che ha massa $m = 10\ kg$. Siano $a = 0.003\ m^{-\frac{3}{2}}$ e $b = 0.1$, la forza esercitata dal ragazzo sullo slittino è parallela al pendio.

1.6 Esercizio 6 (TE 20-Lug-2011, Ing. IND)

In un parco di giochi acquatici c'è uno scivolo alto $h = 3\ m$ e inclinato di $\theta = 20°$ rispetto all'orizzontale. Lo scivolo termina con una curva orizzontale di raggio $r = 5\ m$ che ruota di 90° l'uscita rispetto all'ingresso dello scivolo. Il coefficiente d'attrito dinamico dello scivolo vale $\mu = 0.15$. Un ragazzo si lascia scivolare da fermo dal punto più alto. Calcolare la velocità raggiunta all'uscita dello scivolo e la massima accelerazione centripeta

lungo la traiettoria. Considerare lisce le pareti laterali della guida di scorrimento.



2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Si applica il principio di conservazione dell'energia, fissando lo zero del potenziale gravitazionale al livello più basso raggiunto dal centro di massa della sfera. Nell'istante iniziale il corpo possiede solo energia potenziale gravitazionale, al termine della caduta questa si è completamente trasformata in energia potenziale elastica ed energia cinetica.

$$E_i = E_f \tag{2.1}$$

$$mg\left(l+x\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.2}$$

Compaiono due incognite: x ev. Occorre quindi ricavare una nuova equazione tramite il bilancio delle forze agenti sulla sfera. Per mantenere una traiettoria circolare è necessaria una forza centripeta:

$$F_c = \frac{mv^2}{l+x} = kx - mg \tag{2.3}$$

Mettendo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{l+x} = kx - mg \\ mg\left(l+x\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} mv^2 = kx\left(l+x\right) - mg\left(l+x\right) \\ mg\left(l+x\right) = \frac{1}{2}\left(kx\left(l+x\right) - mg\left(l+x\right)\right) + \frac{1}{2}kx^2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Risolvendo la seconda equazione rispetto all'unica incognita x si ottiene un'unica soluzione accettabile:

$$x = 2.9\ cm \tag{2.6}$$

2.2 Esercizio 2

Dalla definizione di potenza:

$$P = \frac{dL}{dt} \tag{2.7}$$

Il lavoro necessario per sollevare il peso è pari, in valore assoluto, a quello compiuto dalla forza di gravità:

$$L = mg\Delta h \tag{2.8}$$

Quindi:

$$P = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \tag{2.9}$$

$$\Delta t = \frac{mg\Delta h}{P} = \frac{200 \cdot 9.8 \cdot 20}{2300} = 12.25\ s \tag{2.10}$$

2.3 Esercizio 3

Si applica il principio di conservazione dell'energia per stabilire la velocità v_d con cui la sfera giunge nel punto più basso della sua traiettoria.

$$E_i = E_f \tag{2.11}$$

$$mgl = \frac{1}{2}mv_d^2 \tag{2.12}$$

$$v_d = \sqrt{2gl} \tag{2.13}$$

Quando la corda urta il piolo, la sfera comincia a risalire, descrivendo una traiettoria circolare. Il centro della circonferenza è il perno, il raggio è $l-d$. La condizione necessaria affinché il corpo descriva un giro completo è che la tensione del filo nel punto più alto sia maggiore o uguale a zero. Ricordando che per mantenere una traiettoria curvilinea è indispensabile la presenza di una forza centripeta:

$$P + T = \frac{mv_u^2}{l-d} \tag{2.14}$$

$$T = \frac{mv_u^2}{l-d} - mg \geq 0 \tag{2.15}$$

$$v_u^2 \geq g\,(l-d) \tag{2.16}$$

Dove v_u è la velocità del corpo nella sommità della sua orbita. Per calcolare il valore di v_u si ricorre ancora una volta alla conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{2}mv_d^2 = \frac{1}{2}mv_u^2 + mg \cdot 2\,(l-d) \tag{2.18}$$

$$v_u^2 = v_d^2 - 4g\,(l-d) \tag{2.19}$$

Sostituendo il valore di v_d precedentemente ricavato:

$$v_u^2 = 2gl - 4g\,(l-d) = 4gd - 2gl \tag{2.20}$$

Sostituendo tale valore nella condizione 2.16:

$$4gd - 2gl \geq gl - gd \tag{2.21}$$

$$5d \geq 3l \tag{2.22}$$

$$d \geq \frac{3}{5}l \tag{2.23}$$

2.4 Esercizio 4

Il secondo blocca provoca la caduta del primo se la forza peso che lo trascina verso il basso è maggiore della massima forza d'attrito statico che la superficie esercita su m_1. In modo più formale, $m_1$si muove se:

$$T - F_{asMax} \geq 0 \tag{2.24}$$

Dove:

$$T = m_2 g \tag{2.25}$$

Quindi:

$$m_2 g \geq \mu_s N \tag{2.26}$$

$$m_2 g \geq \mu_s m_1 g \tag{2.27}$$

$$m_2 \geq m_1 g \tag{2.28}$$

$$3 \geq 5 \cdot 0.5 \longrightarrow 3 \geq 2.5 \tag{2.29}$$

Quindi il sistema si mette in moto.
Per determinare la velocità richiesta occorre considerare che non è possibile applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica, poiché entra in azione una forza non conservativa. Di conseguenza, all'energia iniziale deve essere sottratto il lavoro compiuto dell'attrito:

$$E_i - L_{attr} = E_f \tag{2.30}$$

Dove:

$$L_{attr} = \int_0^{\Delta h} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{\Delta h} \mu_d m_1 g\, ds = \mu_d m_1 g \Delta h \tag{2.31}$$

Quindi:

$$m_2 g \Delta h - \mu_d m_1 g \Delta h = \frac{1}{2} m_2 v^2 \tag{2.32}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta h\,(m_2 - \mu_d m_1)}{m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot (3 - 0.4 \cdot 5)}{3}} \simeq 3.5\ m/s \tag{2.33}$$

2.5 Esercizio 5

Il minimo lavoro che il ragazzo deve compiere è quello necessario per compensare l'azione della forza di gravità e dell'attrito:

$$L = L_g + L_{attr} \tag{2.34}$$

Il lavoro della forza di gravità si ottiene come differenza di energia potenziale:

$$L_g = mg\Delta h = mgl\sin\theta \tag{2.35}$$

$$L_{attr} = \int_0^l \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_0^l \mu_d\left(x\right)\,dx = \int_0^l ax^{\frac{3}{2}} + b\,dx = \left[\frac{2}{5}ax^{\frac{5}{2}} + bx\right]_0^l = \frac{2}{5}al^{\frac{5}{2}} + bl \tag{2.36}$$

Quindi:

$$L = mgl\sin\theta + \frac{2}{5}al^{\frac{5}{2}} + bl = 4.1\ kJ \tag{2.37}$$

2.6 Esercizio 6

Come nell'esercizio 2.4, per ricavare l'energia finale è necessario sottrarre il lavoro compiuto dalla forza d'attrito all'energia iniziale. Ancora una volta, per semplicità, si fissa lo zero del potenziale gravitazionale al livello dell'uscita dello scivolo.

$$E_i - L_{attr} = E_f \tag{2.38}$$

L'energia iniziale è unicamente potenziale:

$$E_i = mgh \tag{2.39}$$

L'energia finale è solamente cinetica:

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \tag{2.40}$$

Per il calcolo del lavoro compiuto dall'attrito occorre conoscere la lunghezza del tratto percorso dal ragazzo. Questo è composto dal tratto discendente e dalla curva orizzontale:

$$l = l_{disc} + l_{curva} = \frac{h}{\sin\theta} + \frac{\pi}{2}r \tag{2.41}$$

Di conseguenza:

$$L_{attr} = L_{attr} = \int_0^l \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} \tag{2.42}$$

Occorre ora spezzare l'integrale e valutare separatamente il tratto in discesa e quello orizzontale. La forza d'attrito ha infatti intensità differenti nei due casi, in ragione della diversità della reazione normale. In discesa:

$$F_{attr} = \mu N = \mu mg\cos\theta \tag{2.43}$$

$$L_{attr} = \int_0^{\frac{h}{\sin\theta}} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \mu mg\cos\theta\cdot\frac{h}{\sin\theta} = \frac{\mu mgh}{\tan\theta} \tag{2.44}$$

In piano:

$$F_{attr} = \mu N = \mu mg \tag{2.45}$$

$$L_{attr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}r} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \mu mg\cdot\frac{\pi}{2}r = \frac{\mu mg\pi r}{2} \tag{2.46}$$

Il lavoro totale compiuto dalla forza d'attrito è la somma dei due contributi:

$$L_{attr} = \frac{\mu mg\pi r}{2} + \frac{\mu mgh}{\tan\theta} \tag{2.47}$$

Inserendo tutte le quantità calcolate nell'equazione 2.38:

$$\cancel{m}gh - \left(\frac{\mu\cancel{m}g\pi r}{2} + \frac{\mu\cancel{m}gh}{\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 \tag{2.48}$$

$$v_f = \sqrt{2gh - \mu g\pi r - \frac{2\mu gh}{\tan\theta}} \simeq 3.4\ m/s \tag{2.49}$$

L'accelerazione centripeta si rileva solo lungo il tratto curvo e piano. Il suo modulo vale:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.50}$$

Ed è massimo ove lo è la velocità v, quindi all'imbocco della curva, prima che l'attrito la riduca ulteriormente. La velocità v_i di ingresso nella curva si può calcolare con il ragionamento precedentemente utilizzato, con l'accortezza di non tenere conto del lavoro che la forza d'attrito compie nell'ultimo tratto.

$$v_i = \sqrt{2gh - \frac{2\mu gh}{\tan\theta}} \tag{2.51}$$

Quindi:

$$a_{max} = \frac{v_i^2}{r} = \frac{2gh - \frac{2\mu gh}{\tan\theta}}{r} \simeq 6.9m\ m/s^2 \tag{2.52}$$