Tutorato di Fisica 1 - AA 2014/15

Emanuele Fabbiani

15 febbraio 2015

1 Cinematica

1.1 Esercizio 1 (Simulazione di prova scritta, AA 2012-13, Ing. ELE-INFO-BIO)

Un atleta di massa $m = 70\ kg$ percorre cento metri in $\Delta t = 11s$. All'inizio l'atleta si muove con accelerazione costante a fino a raggiungere la velocità $v_0 = 40km/h$, poi si muove a velocità costante. Calcolare il valore dell'accelerazione iniziale a.

1.2 Esercizio 2

Una studentessa lancia verso l'alto un cellulare di massa $m = 143\ g$ ad un'amica, affacciata alla finestra situata ad un'altezza di $h = 4\ m$ sopra di lei. Il cellulare viene afferrato dopo $\Delta t = 1.50\ s$. Si determini la velocità del cellulare:

1. al momento del lancio;
2. all'instante in cui viene raccolto.

1.3 Esercizio 3 (TE 3-Set-2012, Ing. EDILE)

Una palla viene lanciata da terra con velocità iniziale $v_0 = 7m/s$ ad un angolo $\alpha = 53^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il vento che soffia orizzontalmente in direzione ortogonale rispetto a quella del vettore componente della velocità iniziale lungo il terreno imprime un'accelerazione costante $a = 4.8\ m/s^2$. Calcolare a che distanza dal punto di partenza la palla ricade a terra e con quale velocità.

1.4 Esercizio 4 (TE 19-giu-2012, Ing. IND)

Una ballista A è disposta a livello del terreno, mentre una seconda, B è posizionata su una torre alta h. A e B, distanti d, sono inclinate in modo tale da lanciare frecce con velocità iniziali antiparallele. Le traiettorie paraboliche percorse dalle frecce si intersecano nel punto P. Dimostrare che due frecce lanciate dalle due armi nello stesso istante raggiungono P contemporaneamente. Considerare le frecce punti materiali.

1.5 Esercizio 5

Una banconota da 20€ è lunga poco più di 13 cm. Un amico ti propone una sfida: manterrà una banconota sospesa, con l'estremo inferiore all'altezza delle tue dita; ad un certo istante la lascerà cadere: se riuscirai ad afferrarla al volo, questa sarà tua. Accetti?

1.6 Esercizio 6

Un punto materiale decelera da una velocità iniziale v_0 ad una finale $\frac{v_0}{2}$ con una accelerazione $a(v) = -3v^2$. Calcolare il tempo impiegato.

2 Soluzioni

2.1 Esercizio 1

Innanzitutto, sia $v = \frac{40}{3.6} = 11.11\ m/s$ la velocità raggiunta dal corridore. Si indica con $d = 100\ m$ la distanza totale coperta dall'atleta, con t il tempo trascorso in accelerazione, poi si scrivono le leggi del moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} \underbrace{d}_{distanza} = \underbrace{\frac{1}{2}at^2}_{spazio\ coperto\ in\ accelerazione} + \underbrace{v\left(\Delta t - t\right)}_{spazio\ coperto\ a\ velocità\ costante} \\ v = at \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v}{\cancel{a^2}}^2 + v\Delta t - v \cdot \frac{v}{a} \\ t = \frac{v}{a} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} da = \frac{1}{2}v^2 + va\Delta t - v^2 \\ t = \frac{v}{a} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} da - va\Delta t = \frac{1}{2}v^2 - v^2 \\ t = \frac{v}{a} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a = \frac{-\frac{1}{2}v^2}{d - v\Delta t} = \frac{-0.5 \cdot 11.11^2}{100 - 11.11 \cdot 11} = 2.78\ m/s^2 \\ t = \frac{v}{a} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Esercizio 2

Si considera un sistema di riferimento orientato come il piano cartesiano e si applicano le leggi del moto uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v = v_0 - gt \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \frac{y - y_0 + \frac{1}{2}gt^2}{t} = v_0 \\ v = v_0 - gt \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \frac{4 - 0 + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.5^2}{1.5} = v_0 \\ v = v_0 - 9.8 \cdot 1.5 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10\ m/s \\ v = v_0 - 9.8 \cdot 1.5 = -4.68\ m/s \end{cases} \tag{2.9}$$

2.3 Esercizio 3

Si scompone il vettore velocità iniziale lungo le componenti parallele e perpendicolare al terreno:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) & direzione\ orizzontale\ del\ lancio \\ v_{0y} = 0 & direzione\ orizzontale\ del\ vento \\ v_{0z} = v_0 \sin(\alpha) & direzione\ verticale\ del\ lancio \end{cases} \tag{2.10}$$

Lungo entrambi gli assi y e z il moto è uniformemente accelerato, con accelerazioni negative perché discordi con l'orientazione degli assi. Lungo l'asse x, invece, è rettilineo uniforme, poiché non intervengono accelerazioni.

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}at^2 \\ v_y = v_{0y} - at = -at \\ z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0z} - gt \end{cases} \tag{2.11}$$

Nell'istante in cui la palla ricade deve essere $z = 0$. Quindi:

$$0 = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.12}$$

$$t = 0 \vee t = \frac{2v_{0z}}{g} \tag{2.13}$$

La prima soluzione corrisponde all'istante del lancio, pertanto si considera solo la seconda:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sin(53.3^\circ)}{9.8} \simeq 1.15\ s \tag{2.14}$$

Si ricava quindi la gittata come somma vettoriale degli spostamenti lungo gli assi x e y.

$$x = v_0 \cos(\alpha)\, t = 7 \cdot \cos(53.3) \cdot 1.15 = 4.81\ m \tag{2.15}$$

$$y = -\frac{1}{2}at^2 = -0.5 \cdot 4.8 \cdot 1.15^2 = -3.17\ m \tag{2.16}$$

$$G = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4.81^2 + 3.17^2} = 5.76\ m \tag{2.17}$$

La velocità finale è invece la somma vettoriale delle componenti del vettore velocità lungo tutti i tre assi - per utilizzare il linguaggio matematico, la norma del vettore velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) = 7\cos(53.3) = 4.18\ m/s \\ v_y = -at = -4.8 \cdot 1.15 = -5.52\ m/s \\ v_y = v_{0z} - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt = 7\sin(53.3^\circ) - 9.8 \cdot 1.15 = -5.66\ m/s \end{cases} \tag{2.18}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4.18^2 + 5.52^2 + 5.66^2} = 8.94\ m/s \tag{2.19}$$

2.4 Esercizio 4

La ballista A è posizionata nell'origine del sistema di riferimento e spara la sua freccia verso l'alto:

$$\begin{cases} x_a = 0 + v_{0x_a}t \\ y_a = v_{0y_a}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.20}$$

B, invece, è piazzata in un punto che ha coordinate (d, h) e lancia la freccia verso il basso:

$$\begin{cases} x_b = d - v_{0x_b}t \\ y_b = h - v_{0y_b}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

Se i due dardi devono giungere contemporaneamente in P deve essere:

$$\begin{cases} x_a = x_b \\ y_a = y_b \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} 0 + v_{0x_a}t = d - v_{0x_b}t \\ v_{0y_a}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - v_{0y_b}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} v_{0x_a}t + v_{0x_b}t = d \\ v_{0y_a}t + v_{0y_b}t = h \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} t = \frac{d}{v_{0x_a} + v_{0x_b}} \\ t = \frac{h}{v_{0y_a} + v_{0y_b}} \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\frac{h}{v_{0y_a} + v_{0y_b}} = \frac{d}{v_{0x_a} + v_{0x_b}} \tag{2.26}$$

Ora, mediante le formule trigonometriche relative ai triangoli rettangoli è possibile calcolate le componenti dei due vettori velocità. Detto α l'angolo formato dalla velocità iniziale di A con il terreno, si ha infatti:

$$v_{0x_a} = v_0 \cos(\alpha) \tag{2.27}$$

$$v_{0y_a} = v_0 \sin(\alpha) \tag{2.28}$$

$$v_{0x_b} = v_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_0 \cos(\alpha) \tag{2.29}$$

$$v_{0y_b} = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_0 \sin(\alpha) \tag{2.30}$$

Tornando all'equazione precedente:

$$\frac{h}{v_0 \sin(\alpha) + v_0 \sin(\alpha)} = \frac{d}{v_0 \cos(\alpha) + v_0 \cos(\alpha)} \tag{2.31}$$

$$\frac{h}{d} = \frac{v_0 \sin(\alpha) + v_0 \sin(\alpha)}{v_0 \cos(\alpha) + v_0 \cos(\alpha)} \tag{2.32}$$

$$\frac{h}{d} = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{2v_0 \cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \tag{2.33}$$

Per la costruzione del triangolo che unisce le due balliste e la base della torre, la condizione è sempre verificata.

2.5 Esercizio 5

No. I tempi di reazione di un uomo si aggirano mediamente intorno ai 2 decimi di secondo. Assumendo che la banconota sia perfettamente verticale e che quindi l'attrito con l'aria sia trascurabile, in quel lasso di tempo essa percorre un spazio $\Delta x = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 0.2^2 = 19.6\ cm$, maggiore della lunghezza della banconota.

2.6 Esercizio 6

Per definizione:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2.34}$$

$$-3v^2 = \frac{dv}{dt} \tag{2.35}$$

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili.

$$dt = \frac{dv}{-3v^2} \tag{2.36}$$

$$\int_0^t 1\, dt = \int_{v_0}^{\frac{v_0}{2}} \frac{1}{-3v^2}\, dv \tag{2.37}$$

$$t = \left[-\frac{1}{3v}\right]_{v_0}^{\frac{v_0}{2}} = \frac{1}{3v_0} \tag{2.38}$$