Formulario

Richiami di algebra

I radicali

Razionalizzazioni

- $$\frac{A}{\sqrt[n]{B}} = \frac{A}{\sqrt[n]{B}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B^{n-1}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-1}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-1}}}{B}$$
- $$\frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} = \frac{A}{\sqrt{B} \pm \sqrt{C}} \cdot \frac{\sqrt{B} \mp \sqrt{C}}{\sqrt{B} \mp \sqrt{C}} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B} \mp \sqrt{C}\right)}{\left(\sqrt{B}\right)^2 - \left(\sqrt{C}\right)^2} = \frac{A \cdot \left(\sqrt{B} \mp \sqrt{C}\right)}{B - C}$$

Radicali doppi $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

- Se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \ ,$$
- Se b è divisibile per 4 ed esistono due numeri interi p e q tali che $\begin{cases} p \cdot q = \dfrac{b}{4} \\ p + q = a \end{cases}$
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{p} \pm \sqrt{q}$$

Il valore assoluto

$$|\,a\,| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Proprietà del valore assoluto

- $\forall\, a \in R \quad |\,a\,| \geq 0$;
- $\forall\, a, b \in R \quad |\,a \cdot b\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$;
- $\forall\, a, b \in R \quad |\,a / b\,| = |\,a\,| / |\,b\,|$;
- $\forall\, a, b \in R \quad |\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$ (*disuguaglianza triangolare*);
- $\forall\, a \in R \quad \sqrt{a^2} = |\,a\,|$;
- Se $k \geq 0$
  $|\,a\,| < k \iff -k < a < k$
  $|\,a\,| > k \iff a < -k \ \vee\ a > k$
  $|\,a\,| = k \iff a = \pm k.$
- Se $k < 0$
  $|\,a\,| \leq k$ la disuguaglianza è impossibile
  $|\,a\,| > k$ la disuguaglianza è sempre vera

Le equazioni di secondo grado

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

Se b è un numero pari $\Rightarrow$ $x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$ $\quad \dfrac{\Delta}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$

- se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni reali e distinte
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni coincidenti
- se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali

Relazione tra i coefficienti e le soluzioni

Se l'equazione ha due soluzioni reali x_1 e x_2 allora $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Regola di Cartesio

Data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, ad ogni permanenza dei segni dei coefficienti a, b, c corrisponde una soluzione negativa, ad ogni variazione una soluzione positiva.

Equazioni incomplete

Se $b = 0$ (equazione pura) $ax^2 + c = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

- impossibile se $-\dfrac{c}{a} < 0$
- $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ se $-\dfrac{c}{a} \geq 0$

Se $c = 0$ (equazione spuria) $ax^2 + bx = 0$ $\Rightarrow$ $x \cdot (ax + b) = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0 \vee x = -\dfrac{b}{a}$,

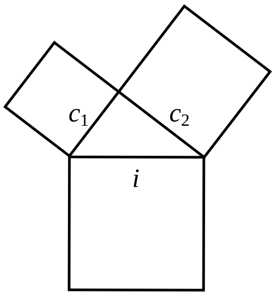
Se $b = c = 0$ (equazione monomia) $ax^2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$.

Regole di scomposizione dei polinomi

Numero dei termini	Regola	Esempio
Binomi	Raccoglimento totale Differenza di due quadrati: $A^2 - B^2 = (A + B)\cdot(A - B)$ Differenza di due cubi: $A^3 - B^3 = (A - B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$ Somma di due cubi: $A^3 + B^3 = (A + B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$	$6ab^2 + 3ab^3 = 3ab^2\cdot(2 + b)$ $x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x + 2y)\cdot(x - 2y)$ $8 - a^3 = 2^3 - a^3 = (2 - a)\cdot(4 + 2a + a^2)$ $b^3 + 27 = b^3 + 3^3 = (b + 3)\cdot(b^2 - 3b + 9)$
Trinomi	Raccoglimento totale Quadrato di un binomio: $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ Trinomio speciale: $x^2 + Sx + P = (x + A)\cdot(x + B)$ $S = A + B$ $P = A\cdot B$ Trinomio di 2° grado: $ax^2 + bx + c$ con due zeri x_1, x_2 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$	$6x^3 - 2x^2 + 4x = 2x\cdot(3x^2 - x + 2)$ $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$ $A = a$, $B = -2$; $2AB = 2\cdot a\cdot(-2) = -4a$ $x^2 - x - 6 = (x + 2)\cdot(x - 3)$ $S = -1 = 2 + (-3)$ $P = -6 = 2\cdot(-3)$ $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{cases}$
Quadrinomi	Raccoglimento totale Raccoglimento parziale Cubo di un binomio: $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$	$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 4x = x\cdot(x^3 - 3x^2 - 6x + 4)$ $2a^2 - 4a - ab + 2b = 2a\cdot(a - 2) - b\cdot(a - 2) = (a - 2)\cdot(2a - b)$ $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$ $A = a$, $B = -2$; $3A^2B = 3\cdot a^2\cdot(-2) = -6a^2$, $3AB^2 = 3\cdot a\cdot(-2)^2 = 12a$

Richiami di geometria euclidea

Teorema di Pitagora

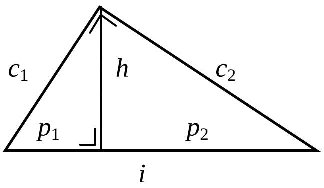


$i^2 = c_1^2 + c_2^2$

$c_1^2 = i^2 - c_2^2$

$c_2^2 = i^2 - c_1^2$

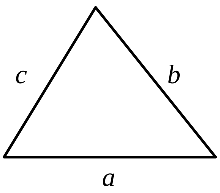
Teoremi di Euclide



Primo teorema $\quad i : c_1 = c_1 : p_1 \quad\quad i : c_2 = c_2 : p_1$

Secondo teorema $\quad p_1 : h = h : p_2$

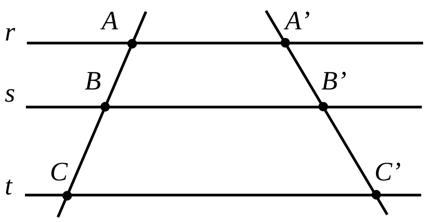
Formula di Erone



Indicato con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

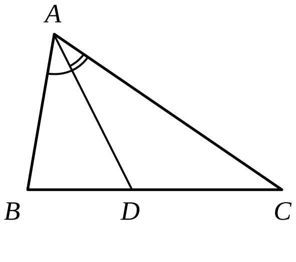
$Area = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$

Teorema di Talete



$r \,/\!/\, s \,/\!/\, t \quad \Rightarrow \quad AB : BC = A'B' : B'C'$

Teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo

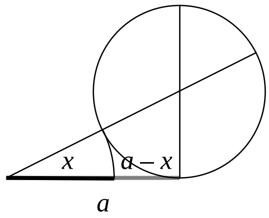


$B\hat{A}D \cong C\hat{A}D \quad \Rightarrow \quad BD : DC = AB : AC$

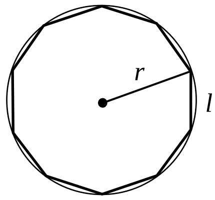
Sezione aurea

x sezione aurea di un segmento di lunghezza a $\Rightarrow$ $a : x = x : (a - x)$

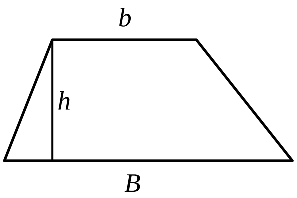
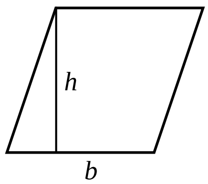
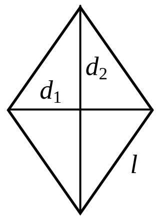
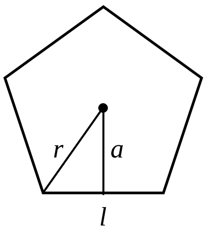
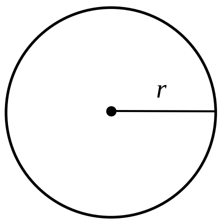
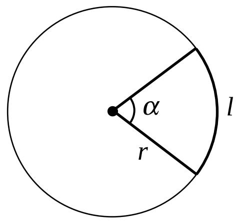
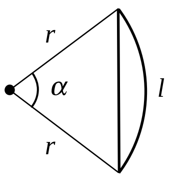
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$$



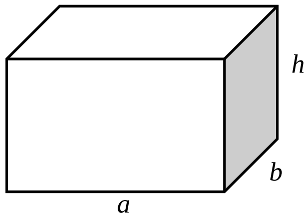
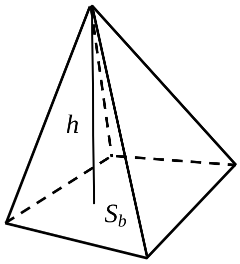
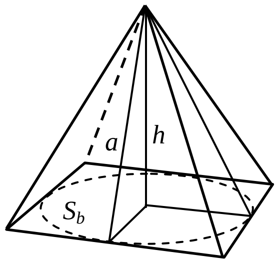
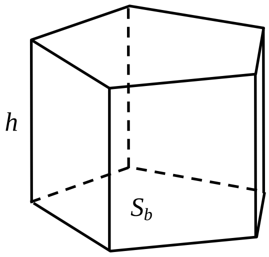
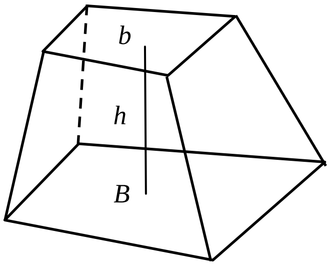
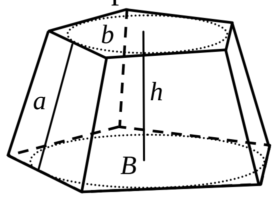
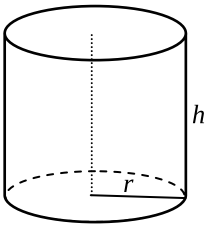
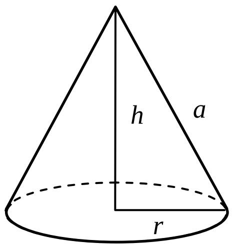
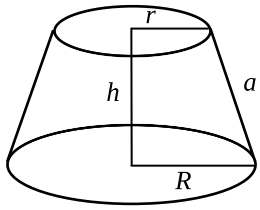
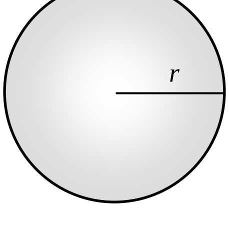
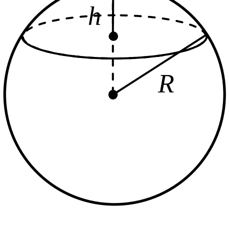
Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio



Perimetri ed aree e di alcune figure piane

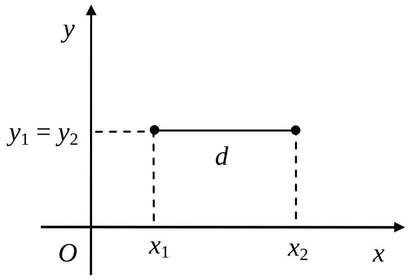
Trapezio  $S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$	Parallelogramma  $S = b \cdot h$	Rombo  $P = 4\,l$ $\quad S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Poligono regolare  P = perimetro, n = numero dei lati $P = n \cdot l \quad S = \frac{P \cdot a}{2}$ $S = \frac{n}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot l^2 = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot r^2$	Cerchio  C = lunghezza della circonferenza $C = 2\pi r \quad S = \pi r^2$	Settore circolare  α = misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente $l = \alpha \cdot r \quad S = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$
Segmento circolare  α = misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente $S = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$		

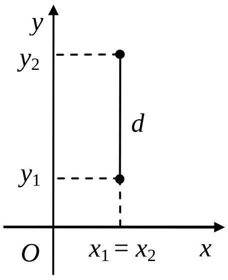
Aree e volumi di alcuni solidi notevoli

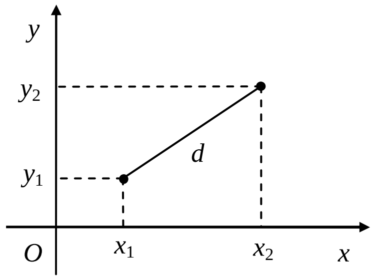
Parallelepipedo rettangolo  $S_l = 2(a+b)\,h$ $S_t = 2(ab+ah+bh)$ $\quad V = abh$	Piramide  $V = \frac{1}{3} S_B\, h$	Piramide retta  P = perimetro della base $S_l = \frac{1}{2} P\, a$ $\quad V = \frac{1}{3} S_B\, h$
Prisma retto  P = perimetro della base $S_l = P\,h$ $\quad V = S_B\, h$	Tronco di piramide  $V = \frac{1}{3} h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)$	Tronco di piramide retta  P = perimetro base maggiore p = perimetro base minore $S_l = \frac{1}{2}(P+p)\,a$ $V = \frac{1}{3} h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)$
Cilindro  $S_l = 2\pi rh$ $\quad V = \pi r^2 h$	Cono retto  $S_l = \pi ra$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	Tronco di cono  $S_l = \pi(R+r)\,a$ $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$
Sfera  $S = 4\pi r^2$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$	Calotta e segmento sferico  $S = 2\pi Rh$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$	

Geometria analitica

Distanza tra due punti (x_1; y_1) e (x_2; y_2)



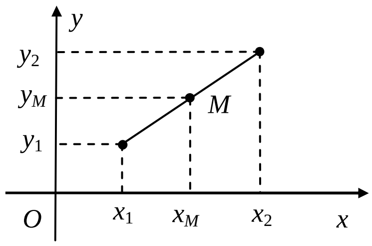




$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \begin{cases} |x_2 - x_1| & \text{se } y_2 = y_1 \\ |y_2 - y_1| & \text{se } x_2 = x_1 \end{cases}$$

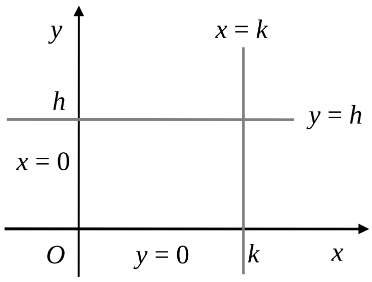
Punto medio di un segmento di estremi (x_1; y_1) e (x_2; y_2)

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

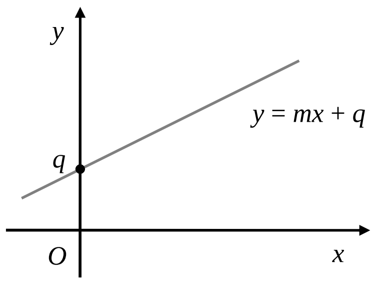


La retta

Equazioni delle rette parallele agli assi



Equazioni delle rette non parallele all'asse *y*



Equazione della retta in forma implicita

$ax + by + c = 0$

Equazione della retta in forma esplicita

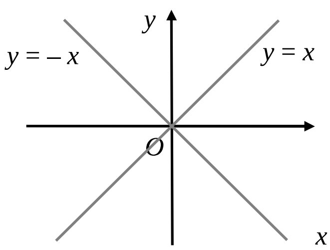
$y = mx + q$

m coefficiente angolare, q ordinata all'origine

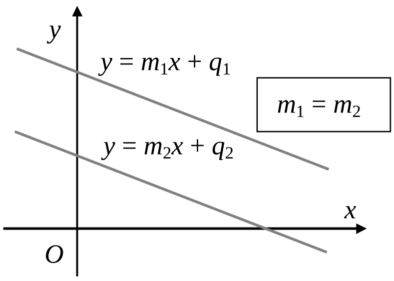
Equazioni delle bisettrici dei quadranti

1° e 3° quadrante $y = x$

2° e 4° quadrante $y = -x$

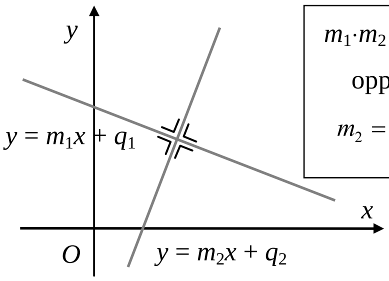


Condizione di parallelismo



$$m_1 = m_2$$

Condizione di perpendicolarità

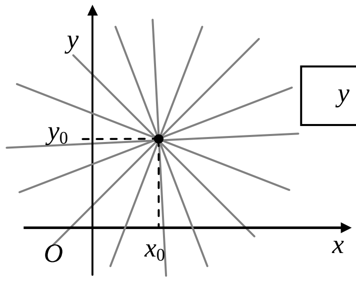


$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

oppure

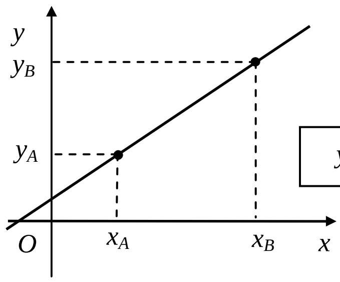
$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Retta passante per un punto (x_0; y_0)



$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

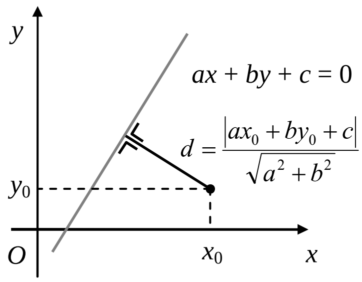
Retta passante per due punti *A* e *B*



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

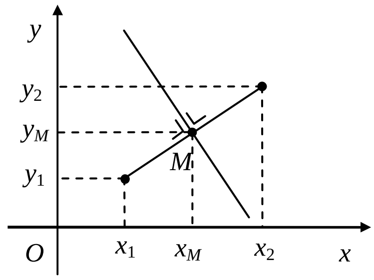
$$y - y_A = m_{AB}\,(x - x_A)$$

Distanza di un punto (x_0; y_0)
dalla retta $ax + by + c = 0$



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

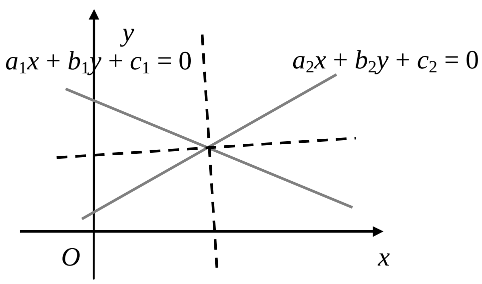
Asse di un segmento di estremi
***A*(x_1; y_1) e *B*(x_2; y_2)**



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

oppure $y - y_M = -\dfrac{1}{m_{AB}}(x - x_M)$

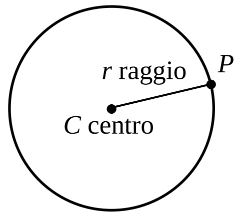
Bisettrici degli angoli formati da due rette $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$



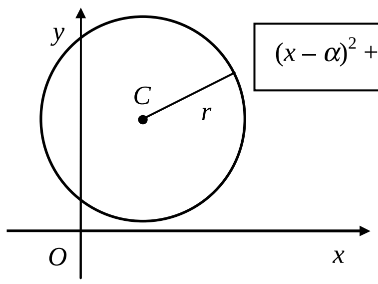
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

La circonferenza

Definizione di circonferenza: $\overline{PC} = r$



Equazione della circonferenza con centro $C(\alpha; \beta)$ e raggio r



$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

Equazione canonica della circonferenza

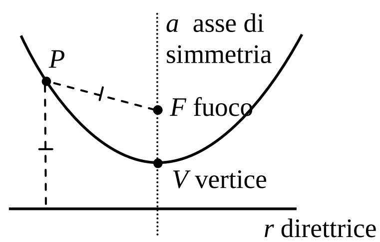
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a^2 + b^2 - 4c > 0$

Centro $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

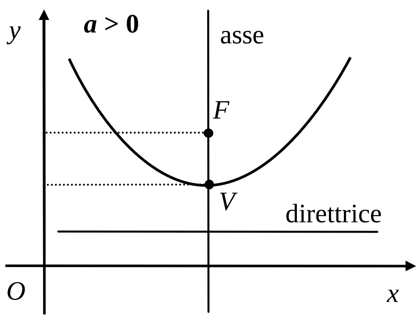
Raggio $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

La parabola

Definizione di parabola: $\overline{PF} = d(P; r)$



Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y



Equazione: $y = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto

$a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso

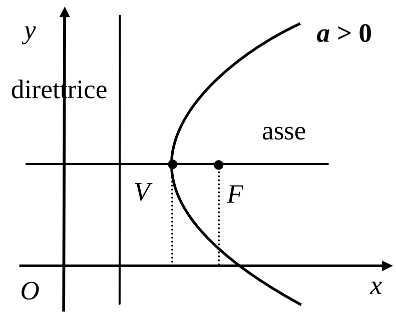
Asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$

Vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

Direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x



Equazione: $x = ay^2 + by + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$a > 0$ la concavità è rivolta verso destra

$a < 0$ la concavità è rivolta verso sinistra

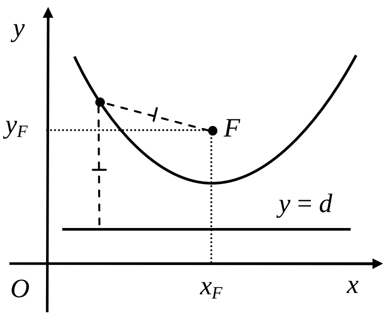
Asse di simmetria $y = -\frac{b}{2a}$

Vertice $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

Fuoco $F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

Direttrice $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Parabola avente direttrice $y = d$ e fuoco F

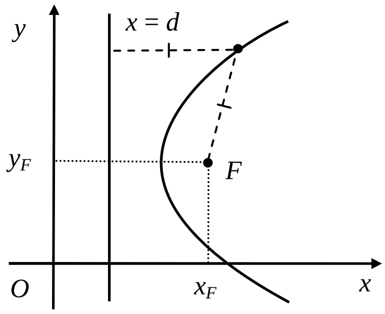


$$(y - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

Equazione della parabola di vertice V ed asse parallelo all'asse y

$$y - y_V = a\,(x - x_V)^2$$

Parabola avente direttrice $x = d$ e fuoco F



$$(x - d)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

Equazione della parabola di vertice V ed asse parallelo all'asse x

$$x - x_V = a\,(y - y_V)^2$$

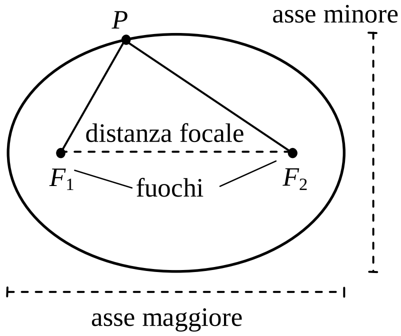
L'ellisse

Definizione di ellisse: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ con $a > 0$

Distanza focale: $\overline{F_1F_2} = 2c$

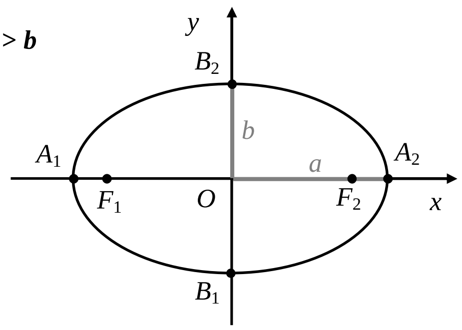
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Eccentricità: $e = \dfrac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza dell'asse maggiore}}$

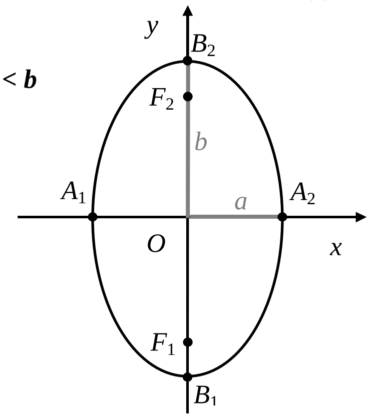


Equazione dell'ellisse riferita agli assi $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

a* > *b



a* < *b



Vertici: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

a* > *b

i fuochi sono sull'asse x $F_1(-c; 0)$, $F_2(-c; 0)$

asse maggiore $\overline{A_1A_2} = 2a$

asse minore $\overline{B_1B_2} = 2b$

eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$

a* < *b

i fuochi sono sull'asse y $F_1(0; -c)$, $F_2(0; -c)$

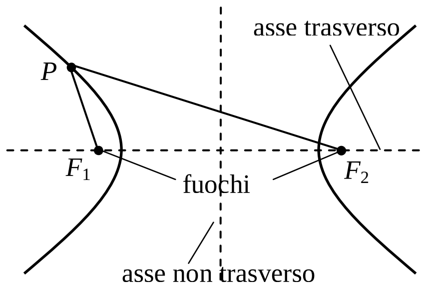
asse maggiore $\overline{B_1B_2} = 2b$

asse minore $\overline{A_1A_2} = 2a$

eccentricità $e = \dfrac{c}{b}$

L’iperbole

Definizione di iperbole: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ con $a > 0$



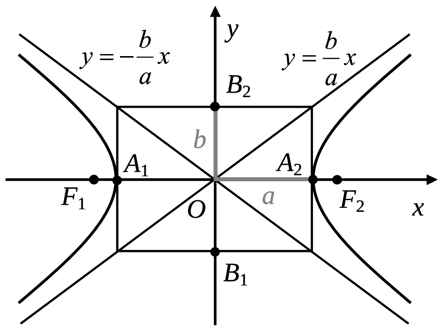
Distanza focale: $\overline{F_1F_2} = 2c$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $\quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Eccentricità: $e = \dfrac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza dell'asse trasverso}}$

Equazione dell’iperbole riferita agli assi

Se i fuochi appartengono all’asse x: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



vertici reali: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$,

vertici non reali $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

fuochi $F_1(-c; 0)$, $F_2(-c; 0)$

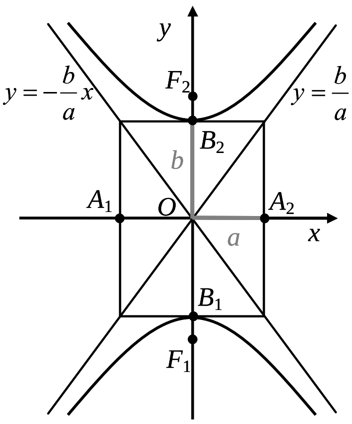
asintoti $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

asse trasverso $\overline{A_1A_2} = 2a$

asse non trasverso $\overline{B_1B_2} = 2b$

eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$

Se i fuochi appartengono all’asse y: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$



vertici reali: $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

vertici non reali $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$

fuochi $F_1(0; -c)$, $F_2(0; -c)$

asintoti $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

asse trasverso $\overline{B_1B_2} = 2b$

asse non trasverso $\overline{A_1A_2} = 2a$

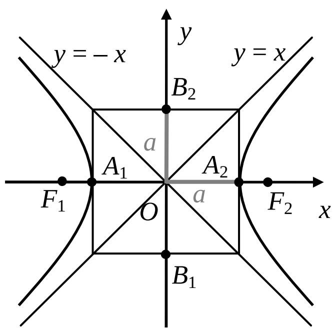
eccentricità $e = \dfrac{c}{b}$

Iperbole equilatera

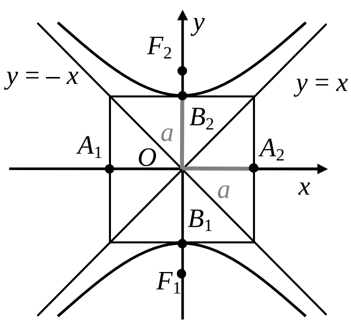
$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} \iff a = b$

$c = a\sqrt{2}$

asintoti $y = \pm x$



Se i fuochi appartengono all’asse x: $x^2 - y^2 = a^2$

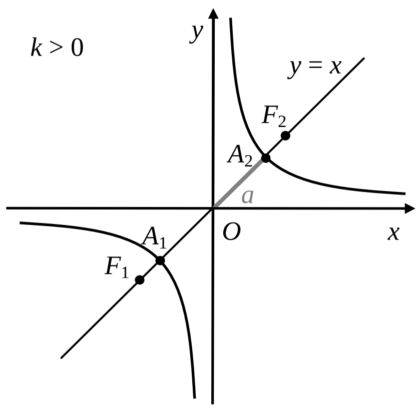


Se i fuochi appartengono all’asse y: $x^2 - y^2 = -a^2$

Equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti: $xy = k$ con $k \neq 0$

$a = \sqrt{2k}$ $\qquad$ $c = 2\sqrt{k}$

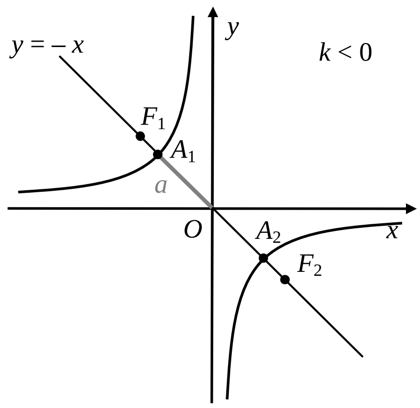
***k* > 0** i vertici e i fuochi sono sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante



vertici $A_1\left(-\sqrt{k}\,;-\sqrt{k}\right)$ $\quad A_2\left(\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right)$

fuichi $F_1\left(-\sqrt{2k}\,;-\sqrt{2k}\right)$ $\quad F_2\left(\sqrt{2k}\,;\sqrt{2k}\right)$

***k* < 0** i vertici e i fuochi sono sulla bisettrice del secondo e del quarto quadrante



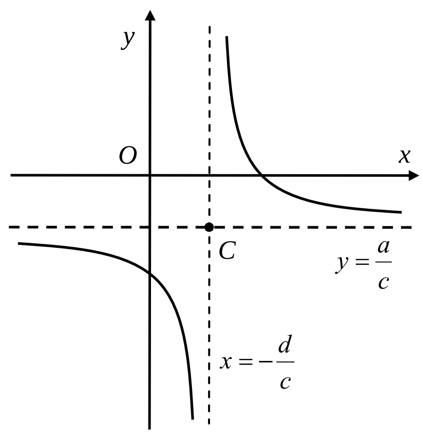
vertici $A_1\left(-\sqrt{-k}\,;\sqrt{-k}\right)$ $\quad A_2\left(\sqrt{-k}\,;-\sqrt{-k}\right)$

vertici $F_1\left(-\sqrt{-2k}\,;\sqrt{-2k}\right)$ $\quad F_2\left(\sqrt{-2k}\,;-\sqrt{-2k}\right)$

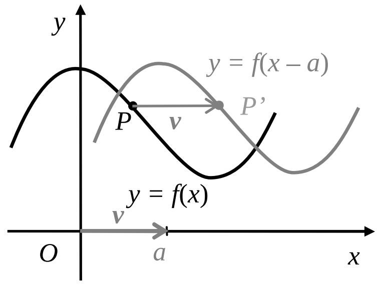
Funzione omografica $\quad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad$ con $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$

asintoti: $\quad y = \dfrac{a}{c}$ e $x = -\dfrac{d}{c}$

centro di simmetria: $\quad C\left(-\dfrac{d}{c}\,;\dfrac{a}{c}\right)$

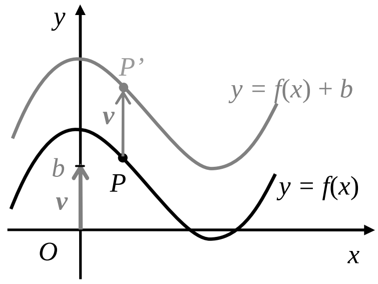


Grafici trasformati



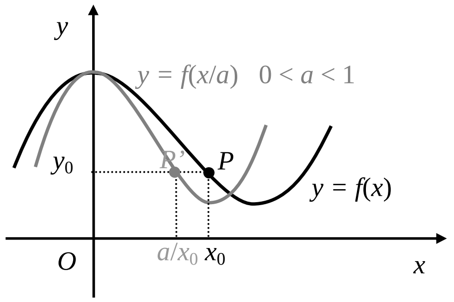
Il grafico della funzione $y = f(x - a)$ si ottiene **traslando** orizzontalmente il grafico della funzione $y = f(x)$ del vettore $\boldsymbol{v} = (a; 0)$.

Se $a > 0$ la traslazione è verso destra, se $a < 0$ la traslazione avviene a sinistra.

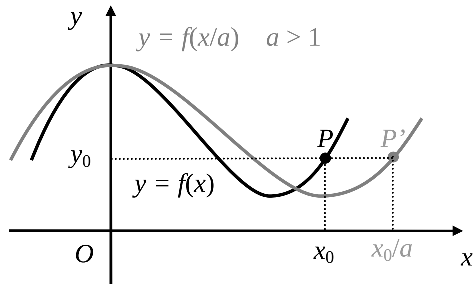


Il grafico della funzione $y = f(x) + b$ si ottiene **traslando** verticalmente il grafico della funzione $y = f(x)$ del vettore $\boldsymbol{v} = (0; b)$.

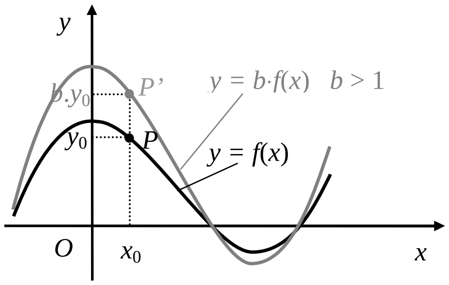
Se $b > 0$ la traslazione è verso l’alto, se $b < 0$ la traslazione è verso il basso.



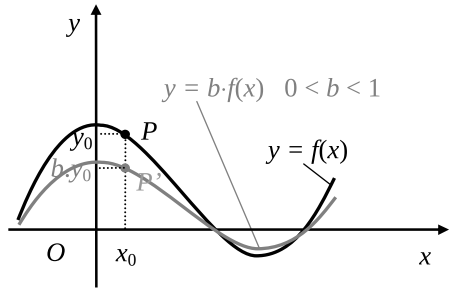
Se $0 < a < 1$ il grafico trasformato $y = f(x/a)$ appare *contratto orizzontalmente* rispetto a quello di partenza.



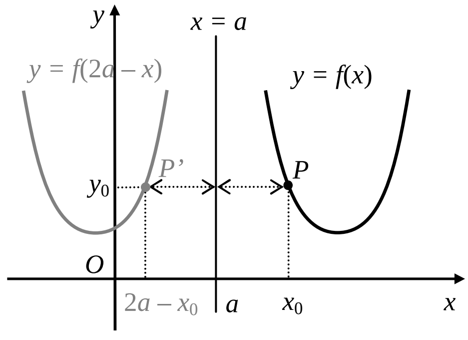
Se $a > 1$ il grafico trasformato $y = f(x/a)$ appare *dilatato orizzontalmente* rispetto a quello di partenza.



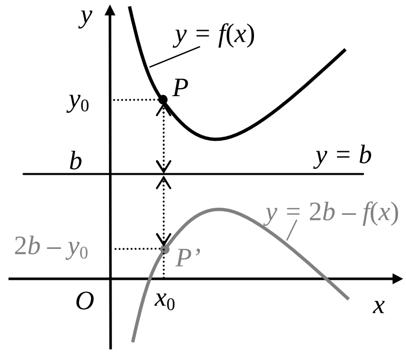
Se $b > 1$ il grafico trasformato appare *dilatato verticalmente* rispetto a quello di partenza;



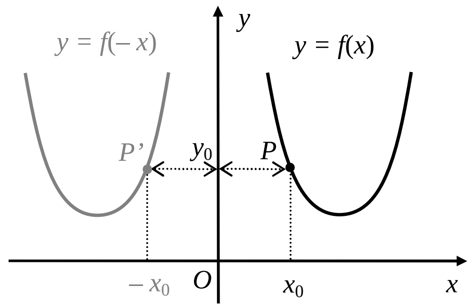
Se $0 < b < 1$ il grafico trasformato appare *contratto verticalmente* rispetto a quello di partenza.



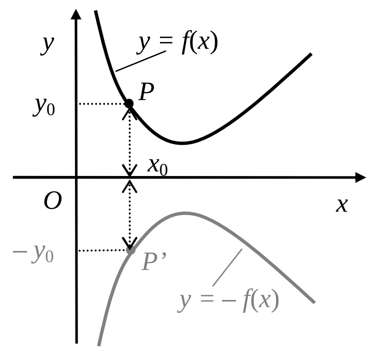
Il grafico trasformato $y = f(2a - x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto alla retta $x = a$



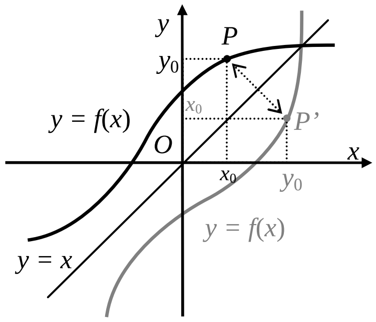
Il grafico trasformato $y = 2b - f(x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto alla retta $x = a$



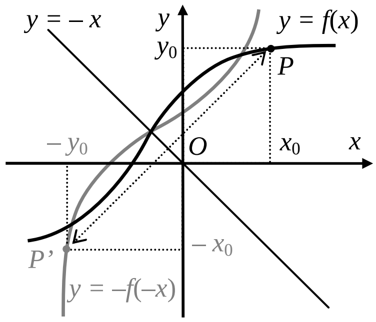
Il grafico trasformato $y = f(-x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto all’asse y ($x = 0$)



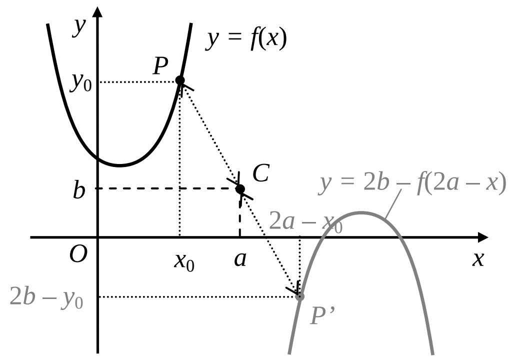
Il grafico trasformato $y = -f(x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto all’asse x ($y = 0$)



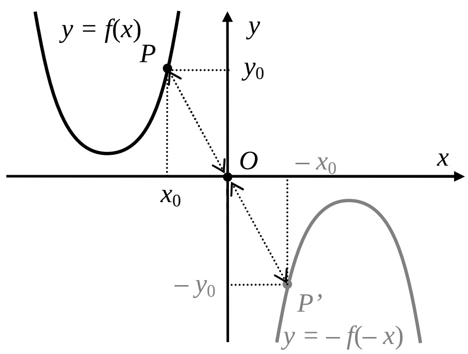
Se f è una funzione biunivoca, il grafico trasformato $x = f(x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.



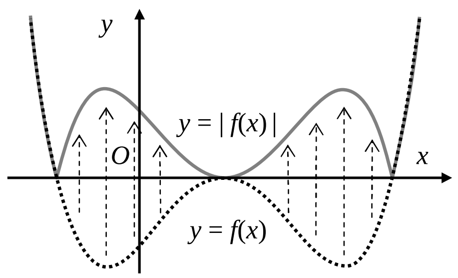
Se f è una funzione biunivoca, il grafico trasformato $x = -f(-x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante.



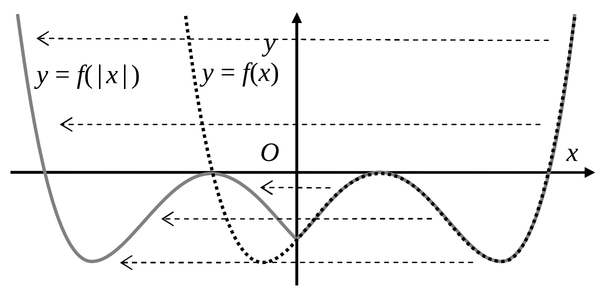
Il grafico trasformato $y = 2b - f(2a - x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto al punto $C(a; b)$.



Il grafico trasformato $y = -f(-x)$ è il simmetrico del grafico $y = f(x)$ rispetto all’origine $O(0; 0)$.



Il grafico della funzione $y = |f(x)|$ coincide con quello della funzione $y = f(x)$ negli intervalli in cui $f(x) \geq 0$; coincide col grafico simmetrico di f rispetto all’asse x, $y = -f(x)$, negli intervalli in cui $f(x) < 0$.

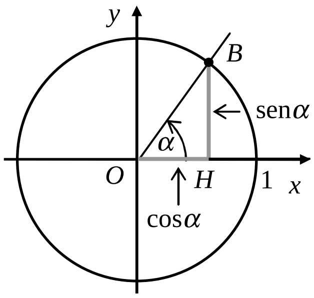


Il grafico della funzione $y = f(|x|)$ coincide con quello della funzione $y = f(x)$ nel semipiano delle ascisse $x \geq 0$; coincide col grafico simmetrico di f rispetto all’asse y, $y = f(-x)$, nel semipiano delle ascisse $x < 0$.

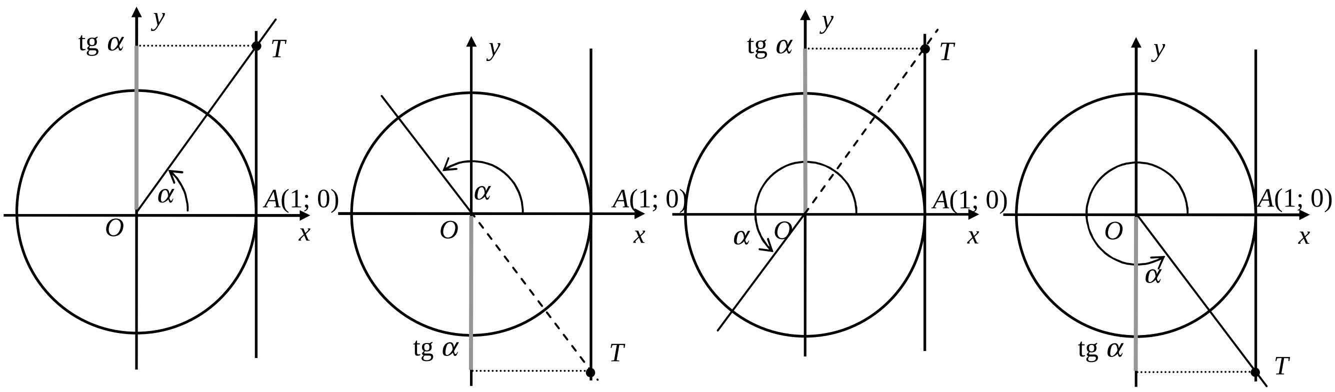
Goniometria

Funzioni goniometriche

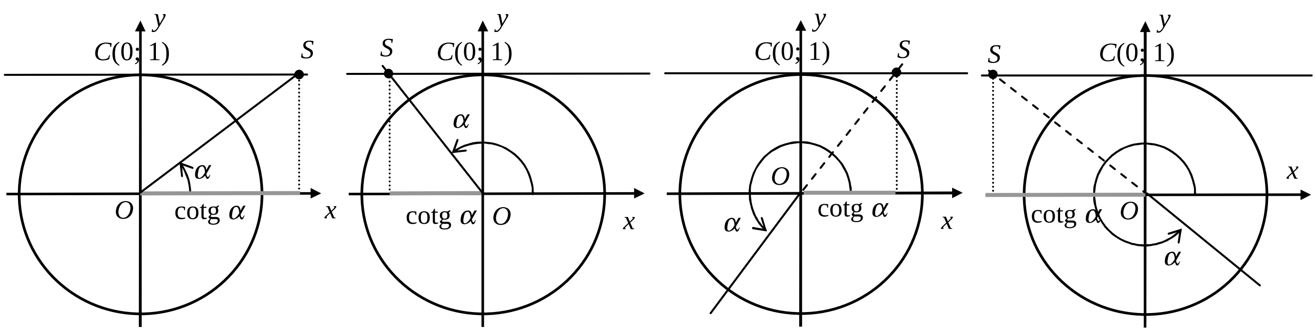
Seno e coseno



Tangente

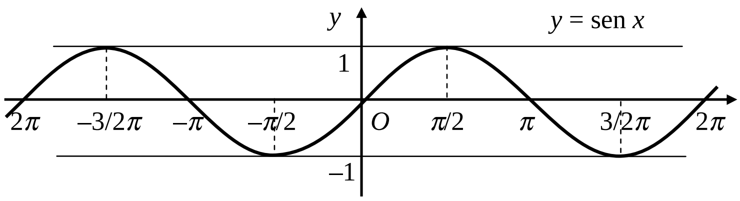


Cotangente



Grafici e proprietà delle funzioni goniometriche

Funzione seno



Dominio $D = R$

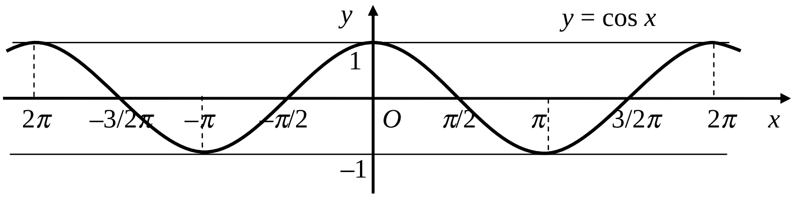
Codominio $C = [–1; 1]$

Periodicità $\forall\ k \in Z$ sen $(x + 2k\pi)$ = sen x,

Limitando lo studio all'intervallo $[–\pi; \pi]$

- la funzione è crescente in $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
- la funzione è decrescente in $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Funzione coseno



Dominio $D = R$

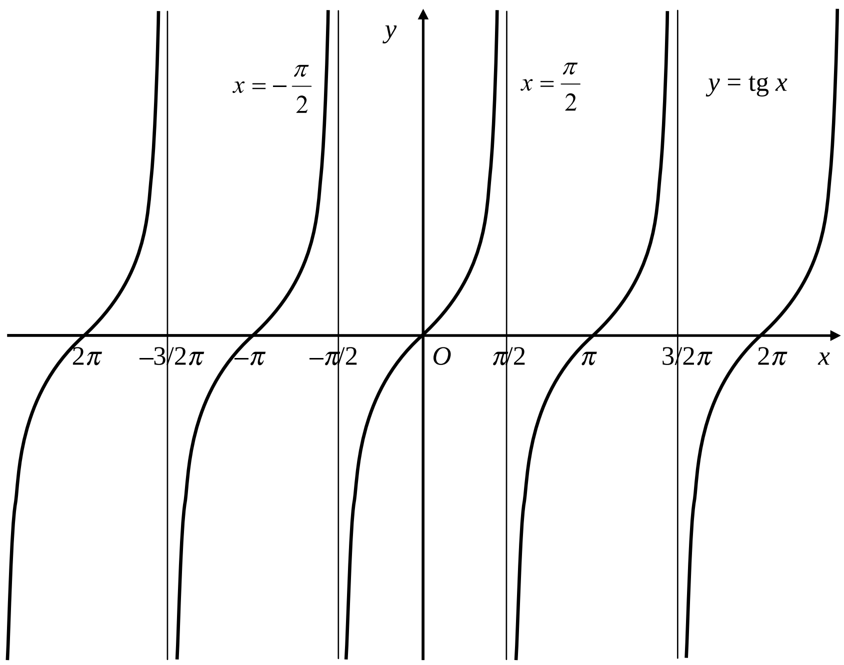
Codominio $C = [–1; 1]$

Periodicità $\forall\ k \in Z$ cos $(x + 2k\pi)$ = cos x,

Limitando lo studio all'intervallo $[–\pi; \pi]$

- la funzione è crescente in $(–\pi; 0)$
- la funzione è decrescente in $(0; \pi)$

Funzione tangente



Dominio $D = R - \{\pi/2 + k\pi \mid k \in Z\}$

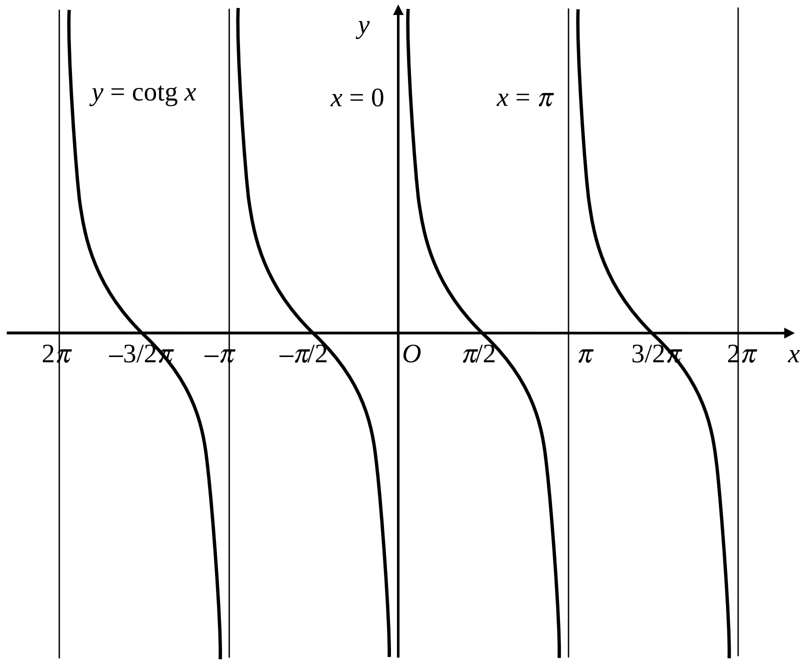
Codominio $C = R$

Periodicità: $\forall\, k \in Z \quad \mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x$

Limitando lo studio all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

- la funzione è crescente nell'intervallo
- $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \mathrm{tg}\, x = +\infty \quad \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \mathrm{tg}\, x = -\infty$
- $x = \pm \frac{\pi}{2}$ asintoti verticali

Funzione cotangente



Dominio $D = R - \{ k\pi \mid k \in Z \}$

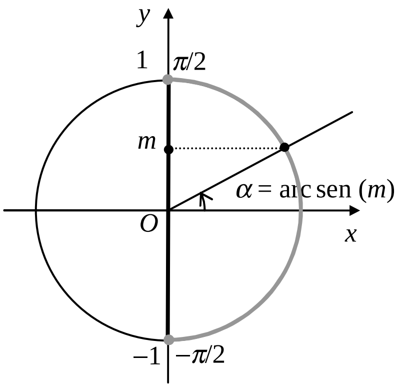
Codominio $C = R$

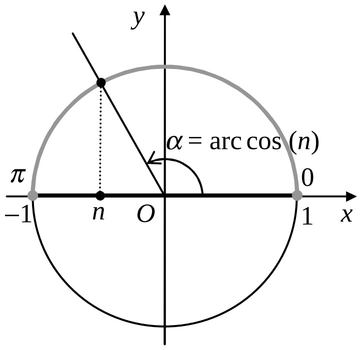
Periodicità: $\forall\, k \in Z \quad \mathrm{cotg}(x + k\pi) = \mathrm{cotg}\, x$

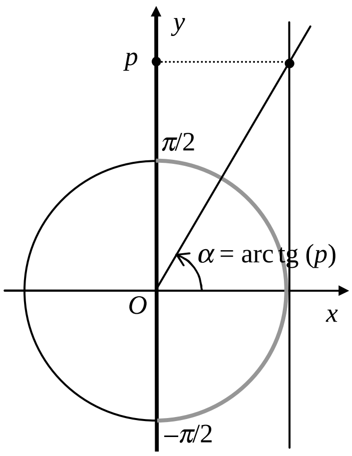
Limitando lo studio all'intervallo $(0; \pi)$

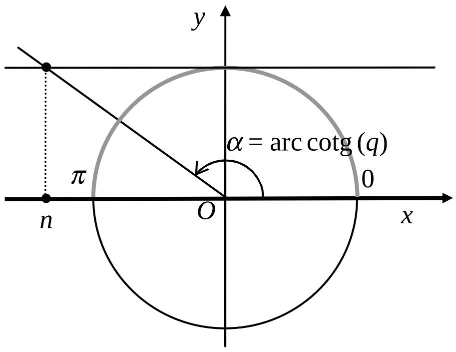
- la funzione è decrescente nell'intervallo
- $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{cotg}\, x = +\infty \quad \lim_{x \to \pi^-} \mathrm{cotg}\, x = -\infty$
- $x = 0$ e $x = \pi$ asintoti verticali

Funzioni goniometriche inverse



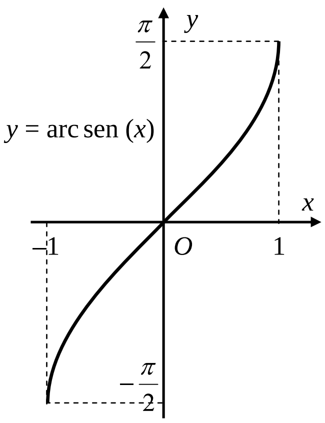






Grafici e proprietà delle funzioni goniometriche inverse

Funzione arcoseno

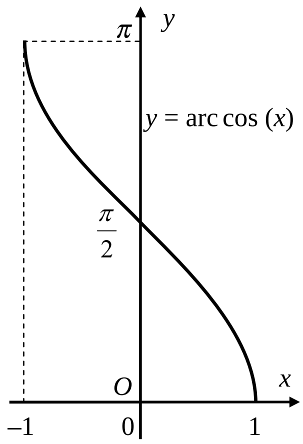


Dominio $D = [-1; 1]$

Codominio $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

La funzione è crescente nel dominio

Funzione arcocoseno

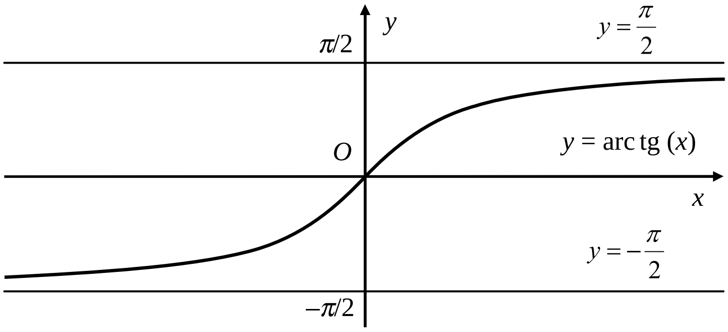


Dominio $D = [-1; 1]$

Codominio $[0; \pi]$

La funzione è decrescente nel dominio

Funzione arcotangente



Dominio R

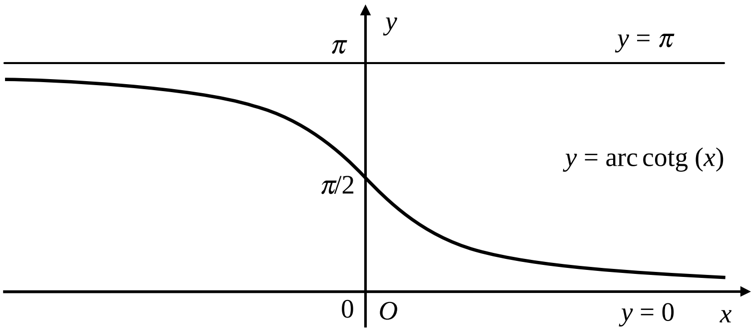
Codominio $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

La funzione è crescente nel dominio

$\lim_{x\to\pm\infty} \text{arc tg}(x) = \pm\frac{\pi}{2}$,

$y = \pm\frac{\pi}{2}$ asintoti orizzontali

Funzione arcocotangente



Dominio R

Codominio $(0; \pi)$

La funzione è decrescente nel dominio

$\lim_{x\to+\infty} \text{arc cotg}(x) = 0$

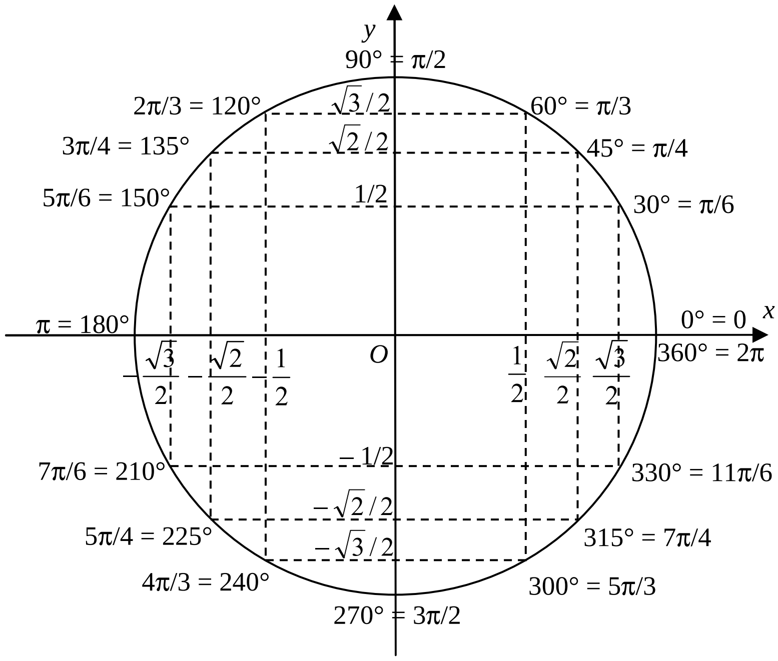
$\lim_{x\to-\infty} \text{arc cotg}(x) = \pi$

$y = 0$ e $y = \pi$ asintoti orizzontali

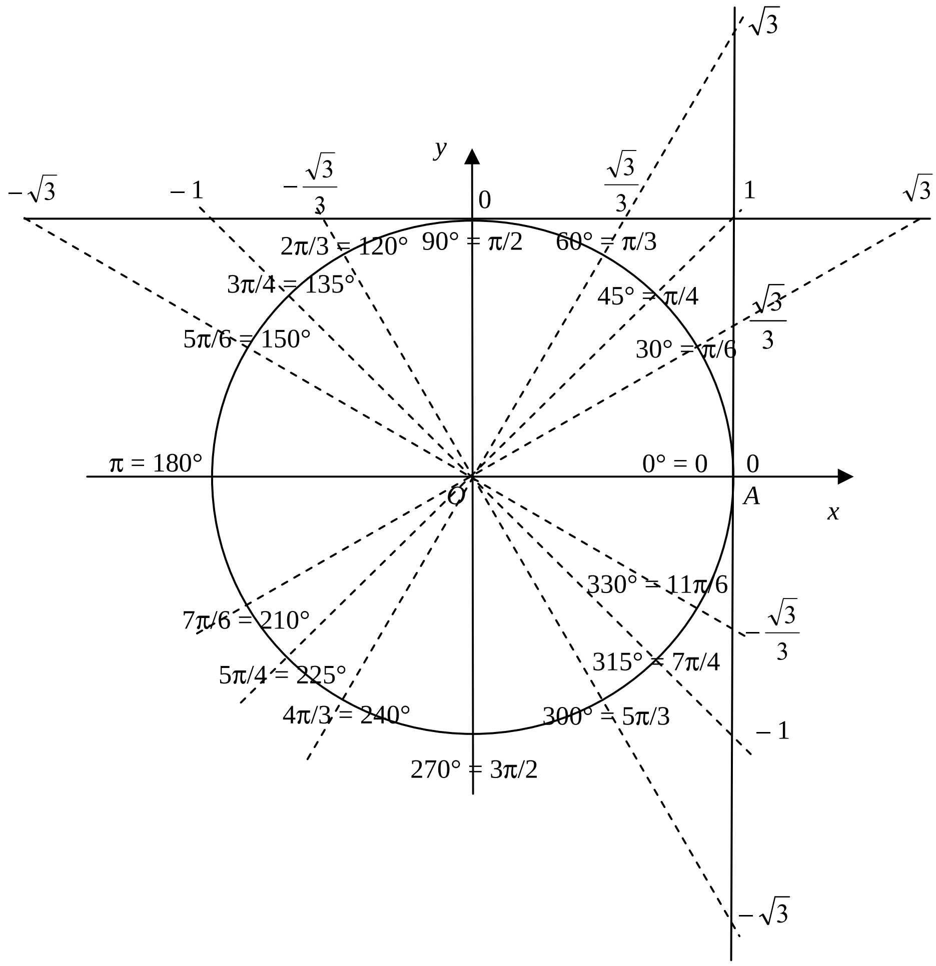
Funzioni goniometriche di angoli particolari

Misura in gradi	**Misura in radianti**	**seno**	**coseno**	**tangente**	**cotangente**
0°	0	0	1	0	non esiste (∞)
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
22°30’	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
67°30’	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste (∞)	0

Seno e coseno di alcuni angoli notevoli e dei loro associati



Tangente e cotangente di alcuni angoli notevoli e dei loro associati



Relazioni e proprietà fondamentali

Relazioni tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \alpha \neq 90° + k180°$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \alpha \neq k180°$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \alpha \neq k90°$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{con} \quad \alpha \neq 90° + k180°$$

Formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} \qquad \text{con } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 90° + k\,180°$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} \qquad \text{con } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq 90° + k\,180°$$

Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{con } \alpha \neq 45° + k\,90° \ \wedge \ \alpha \neq 90° + k\,180°$$

Formule parametriche

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \alpha \neq 180° + k360°$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{con} \;\; t = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \alpha \neq 90° + k180° \;\; \wedge \;\; \alpha \neq 180° + k360°$$

Formule di bisezione

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 180° + k360°$$

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 180° + k360° \qquad\qquad \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k180°$$

Formule di prostaferesi

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}; \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}; \qquad \cos p - \cos q = -\,2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}$$

Formule di Werner

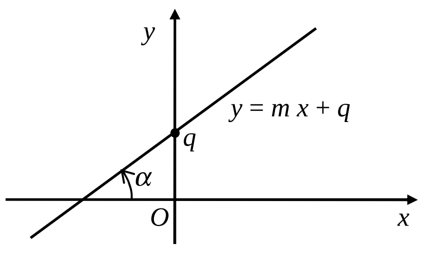
$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\text{sen}\,\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\,(\alpha+\beta) + \text{sen}\,(\alpha-\beta)\right]$$

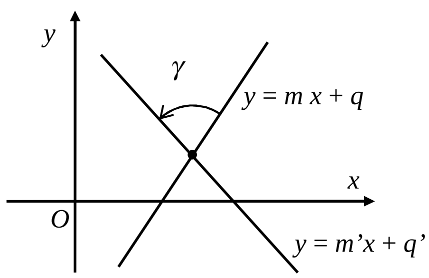
Angolo tra una retta nel piano cartesiano e l'asse delle ascisse

$$\boxed{m = \text{tg}\,\alpha}$$



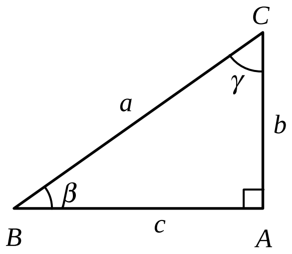
Angolo tra due rette nel piano cartesiano

$$\boxed{\text{tg}\,\gamma = \left|\frac{m-m'}{1+m\,m'}\right|}$$



Trigonometria

Primo teorema sui triangoli rettangoli



$$b = a \text{ sen } \beta \qquad\qquad c = a \cos \beta$$

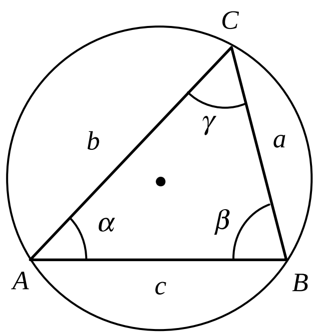
$$b = a \cos \gamma \qquad\qquad c = a \text{ sen } \gamma.$$

Secondo teorema sui triangoli rettangoli

$$b = c \text{ cotg } \gamma \qquad\qquad c = b \text{ tg } \gamma$$

$$b = c \text{ tg } \beta. \qquad\qquad c = b \text{ cotg } \beta.$$

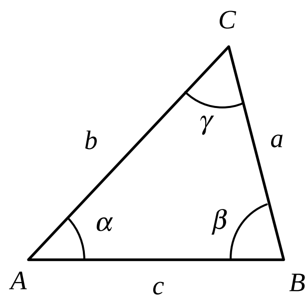
Teorema dei seni



Se indichiamo con r il raggio della circonferenza circoscritta ad un qualunque triangolo

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r.$$

Teorema del coseno



Per un qualunque triangolo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$

Invertendo queste relazioni rispetto ai coseni:

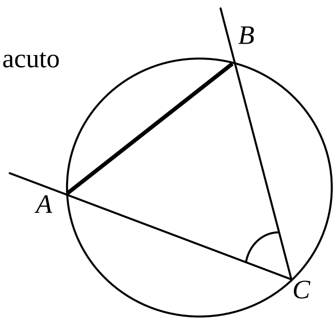
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}.$$

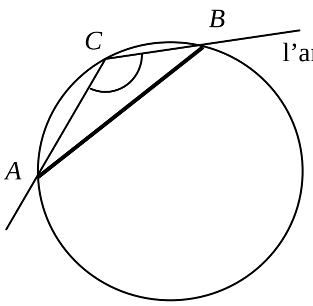
Il teorema sulla corda

Sia AB una qualunque corda di una circonferenza e $A\hat{C}B$ uno degli angoli alla circonferenza da essa sotteso.

$$\overline{AB} = 2r \cdot \text{sen } A\hat{C}B.$$

l'angolo $A\hat{C}B$ è acuto





l'angolo $A\hat{C}B$ è ottuso

Esponenziali

Siano a un numero *reale*, ed n un numero naturale. Si definisce:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a & \text{se } n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-volte} & \text{se } n > 1 \end{cases} \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dato un numero reale $a \geq 0$ e un numero razionale $m/n > 0$, si definisce:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad\qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Dato un numero reale $a > 0$ e un numero irrazionale α, indicate con $\beta_1, \beta_2, \ldots$ e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ due classi contigue di numeri razionali che hanno α come elemento separatore, si definisce a^α come l'elemento separatore delle due classi contigue di potenze ad esponente razionale $a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \ldots$ e $a^{\gamma_1}, a^{\gamma_2}, \ldots$. Si definisce poi $0^\alpha = 0$ per ogni numero reale $\alpha > 0$.

Per le potenze ad esponente reale, valgono le proprietà:

1. $\forall\, x, y \in R \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\forall\, x, y \in R \quad a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $\forall\, x, y \in R \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. Se $a > 0$, $\forall\, x \in R \quad a^x > 0$
5. Se $a > 0$, $\forall\, x \in R \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Funzioni esponenziali

Sia a un prefissato numero reale positivo, si definisce **funzione esponenziale di base *a*** la funzione di equazione:

$$y = a^x.$$

Proprietà

1. Dominio $D = R$;
2. Se $a \neq 1$, codominio $C = (0; +\infty)$;

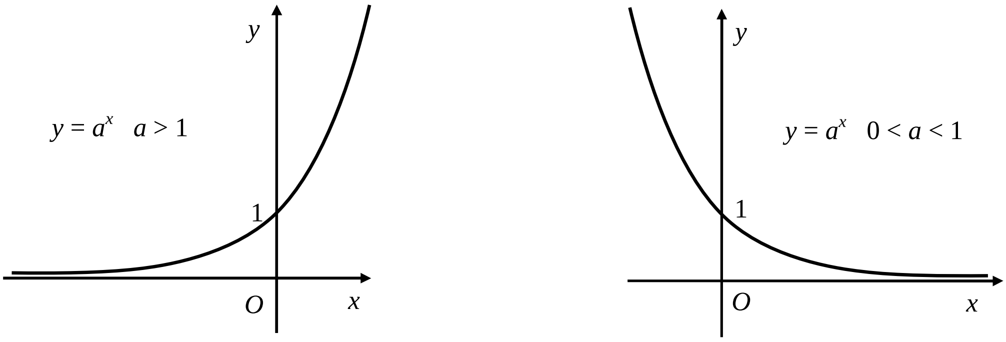
Se $a > 1$

3. la funzione è crescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
4. $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Se $0 < a < 1$

3. la funzione è decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
4. $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Riportiamo di seguito i due grafici:



5. Osserviamo che entrambe le curve passano per il punto (0; 1).

Logaritmi

Sia $b > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, il logaritmo in base a di b è l'esponente da attribuire ad a per ottenere una potenza uguale a b.

$$\log_a b = c \iff a^c = b \quad a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$$

Identità fondamentali $\qquad a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^c = c$

Proprietà dei logaritmi

se $m > 0$, $n > 0$, $b > 0$

logaritmo di un prodotto $\quad \log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

logaritmo di un quoziente $\quad \log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

logaritmo di una potenza $\quad \log_a b^c = c \cdot \log_a b$

Formule del cambiamento di base $\quad \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Funzioni logaritmiche

Sia a un prefissato numero reale positivo diverso da 1, si definisce **funzione logaritmica di base *a*** la funzione di equazione:

$$y = \log_a x.$$

Proprietà

1. dominio $D = (0: +\infty)$;
2. codominio $C = R$;

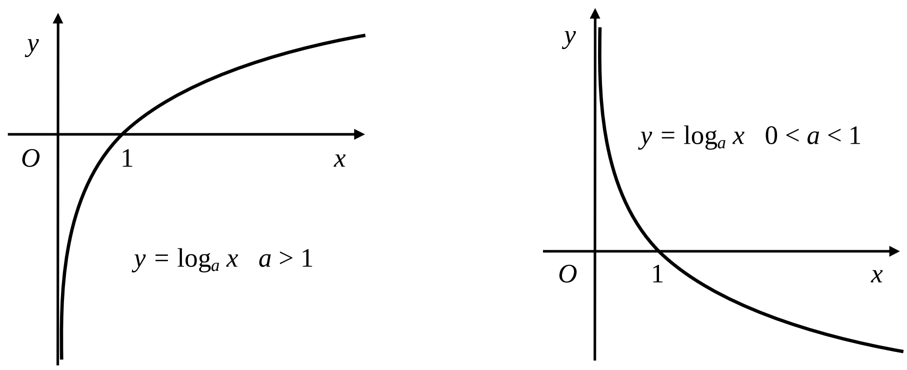
Se $a > 1$

3. la funzione è crescente: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \log_a x_1 < \log_a x_2$
4. $\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

Se $0 < a < 1$

3. la funzione è decrescente: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \log_a x_1 > \log_a x_2$
4. $\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.

Riportiamo di seguito i due grafici:



5. entrambe le curve passano per il punto (1; 0).

Schemi risolutivi di disequazioni di vario tipo

Disequazioni potenza $[g(x)]^n \gtreqless 0,\ n \in N \wedge n \geq 2$

Se *n* è pari	$[g(x)]^n > 0$	$\Leftrightarrow$	$g(x) \neq 0$
	$[g(x)]^n = 0$	$\Leftrightarrow$	$g(x) = 0$
	$[g(x)]^n < 0$		impossibile
Se *n* è dispari	$[g(x)]^n \gtreqless 0$	$\Leftrightarrow$	$g(x) \gtreqless 0$

Disequazioni binomie $ax^n + b \gtreqless 0,\quad n \in N \wedge n \geq 2$

Se *n* è pari la disequazione si risolve in modo simile alla disequazione di 2° grado $ax^2 + b \gtreqless 0$

Se *n* è dispari la disequazione si risolve in modo simile alle disequazioni di 1° grado con la differenza che dopo aver isolato x^n al primo membro, occorre calcolare la radice *n–sima* di entrambi i membri.

Disequazioni trinomie $ax^{2n} + bx^n + c \gtreqless 0,\quad n \in N \wedge n > 2$

- Si considera il trinomio al primo membro $ax^{2n} + bx^n + c$ e si esegue la sostituzione $x^n = t$ ottenendo il trinomio di 2° grado $at^2 + bt + c$;
- si scompone il trinomio $at^2 + bt + c$ in fattori, ottenendo $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$;
- con la sostituzione inversa $t = x^n$ otteniamo la scomposizione del trinomio al primo membro della disequazione iniziale nel prodotto di due binomi: $ax^{2n} + bx^n + c = a(x^n - t_1)(x^n - t_2)$;
- la disequazione di partenza si può quindi riscrivere nella forma:

$$a(x^n - t_1)(x^n - t_2) \gtreqless 0$$

  e si risolve con lo studio del segno dei fattori, …

Disequazioni irrazionali $\sqrt[n]{a(x)} \gtrless b(x),\ n \in N \wedge n > 2$

Se n è pari

- la disequazione $\sqrt[n]{a(x)} < b(x)$ è equivalente al sistema $\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) > 0 \\ a(x) < [b(x)]^n \end{cases}$,

- la disequazione $\sqrt[n]{a(x)} > b(x)$ ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} b(x) < 0 \\ a(x) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) > [b(x)]^n \end{cases}$, che devono essere risolti separatamente.

Se n è dispari la disequazione $\sqrt[n]{a(x)} \gtrless b(x)$ è equivalente alla disequazione che si ottiene elevando entrambi i membri alla n, cioè

$$\sqrt[n]{a(x)} \gtrless b(x) \quad \Leftrightarrow \quad a(x) \gtrless [b(x)]^n$$

Disequazioni in valore assoluto $|\, g(x)\, | \gtrless b$, con $b \in R$

Se $b < 0$

- la disequazione $|\, g(x)\, | \leq b$ è impossibile
- la disequazione $|\, g(x)\, | > b$ è sempre vera (nel dominio di $g(x)$)

Se $b \geq 0$

- la disequazione $|\, g(x)\, | < b$ è equivalente a $-b < g(x) < b$ oppure al sistema $\begin{cases} g(x) < b \\ g(x) > -b \end{cases}$.

Conviene risolvere la disequazione $-b < g(x) < b$ quando $g(x)$ è una funzione monotona nel suo dominio.

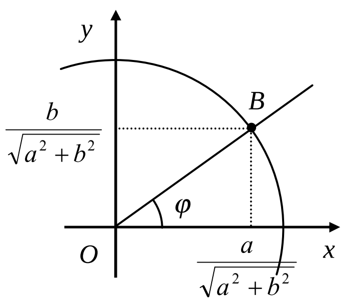
- la disequazione $|\, g(x)\, | > b$ ha per soluzioni l'unione delle soluzioni delle due disequazioni $g(x) < -b \;\;\vee\;\; g(x) > b$.

Disequazioni goniometriche lineari $a \operatorname{sen} x + b \cos x \gtreqless c$, $a \cos x + b \operatorname{sen} x \gtreqless c$

Supponiamo che la disequazione si presenti nella forma $a \operatorname{sen} x + b \cos x \gtreqless c$

- Dividiamo entrambi i membri della disequazione per $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x \gtreqless \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



- Riportiamo sulla circonferenza goniometrica il punto $B\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ e indichiamo con φ l'angolo $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ associato a B. Questo angolo, nella maggior parte dei casi, si ricava facilmente dalle tabelle degli angoli notevoli o da una figura fatta bene, altrimenti si ricava con la calcolatrice scientifica.

  Dato che $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

  possiamo riscrivere la disequazione nella forma

$$\cos \varphi \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos x \gtreqless \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- Ricordando la formula di addizione del seno, riconosciamo che la somma al primo membro è uguale a sen $(x + \varphi)$, quindi possiamo scrivere che

$$\boxed{\text{sen}\,(x+\varphi) \gtreqless \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.}$$

Ci siamo ricondotti ad una disequazione goniometrica elementare. L'angolo φ viene detto **angolo aggiunto** e da il nome al metodo di risoluzione descritto.

Se la disequazione si presenta nella forma $a \cos x + b \,\text{sen}\, x \gtreqless c$, seguendo lo stesso ragionamento, dopo aver determinato un angolo $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ tale che: $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\text{sen}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,[1] la disequazione $a \cos x + b\,\text{sen}\,x \gtreqless c$ è equivalente alla disequazione $\cos(x-\varphi) \gtreqless \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Disequazioni esponenziali $a^{g(x)} \gtreqless b$

Se $b \leq 0$	• la disequazione $a^{g(x)} < b$ è impossibile • $a^{g(x)} \geq b$ è sempre vera (nel dominio di $g(x)$)	
Se $b > 0$	nel caso $a > 1$	$a^{g(x)} \gtreqless b \iff \log_a a^{g(x)} \gtreqless \log_a b \iff g(x) \gtreqless \log_a b$
	nel caso $0 < a < 1$	$a^{g(x)} \gtreqless b \iff \log_a a^{g(x)} \gtreqless \log_a b \iff g(x) \lesseqgtr \log_a b$
	Se b si può esprimere facilmente come potenza di a, cioè $b = a^c$, allora si può procedere più speditamente come segue:	
	nel caso $a > 1$	$a^{g(x)} \gtreqless a^c \iff g(x) \gtreqless c$
	nel caso $0 < a < 1$	$a^{g(x)} \gtreqless a^c \iff g(x) \lesseqgtr c$

Disequazioni logaritmiche $\log_a g(x) \gtreqless b$

$\log_a g(x) \gtreqless b \iff \log_a g(x) \gtreqless \log_a a^b$

Se $a > 1$ la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \gtreqless a^b \end{cases}$

Se $0 < a < 1$ la disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \lesseqgtr a^b \end{cases}$

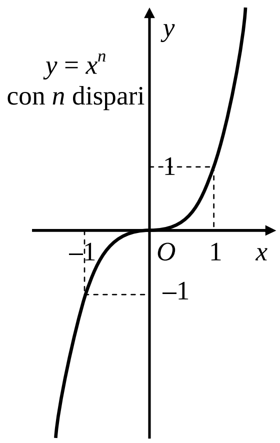
[1] Ovvero che ha come punto associato sulla circonferenza goniometrica $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

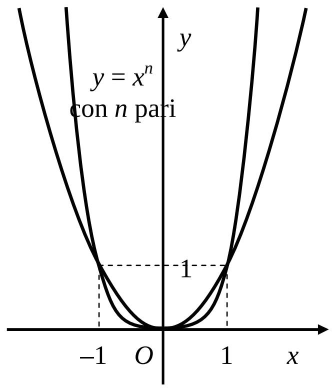
Domini delle funzioni più comuni

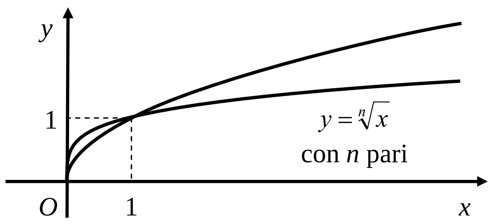
Nello schema che segue $g(x)$ indica una funzione qualunque funzione

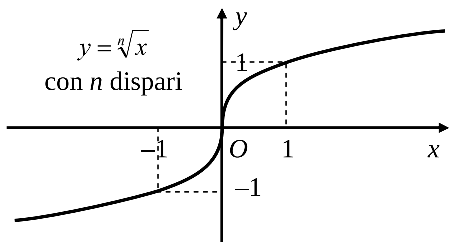
Funzioni	**Domini**
Razionali intere	R
Razionali fratte	R – {valori che annullano il denominatore}
$y = \sqrt[n]{g(x)}$ n pari	Soluzioni della disequazione $g(x) \geq 0$
$y = \sqrt[n]{g(x)}$ n dispari	Dominio di $g(x)$
$y = a^{g(x)}$, $a > 0$	Dominio di $g(x)$
$y = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$	Soluzioni della disequazione $g(x) > 0$
$y = \text{sen}\, g(x)$ $y = \cos g(x)$	Dominio di $g(x)$
$y = \text{tg}\, g(x)$	Soluzioni della disequazione $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$
$y = \text{cotg}\, g(x)$	Soluzioni della disequazione $g(x) \neq k\pi$, $k \in Z$
$y = \text{arc sen}\, g(x)$ $y = \text{arc cos}\, g(x)$	Soluzioni della disequazione $-1 \leq g(x) \leq 1$
$y = \text{arc tg}\, g(x)$ $y = \text{arc ctg}\, g(x)$	Dominio di $g(x)$
$y = [g(x)]^{\alpha}$ α irrazionale positivo	Soluzioni della disequazione $g(x) \geq 0$
$y = h(x)^{g(x)}$	Soluzioni dei sistemi $\begin{cases} h(x) > 0 \\ \text{Dominio di } g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

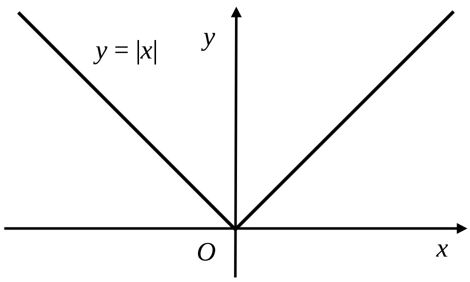
Grafici delle principali funzioni algebriche

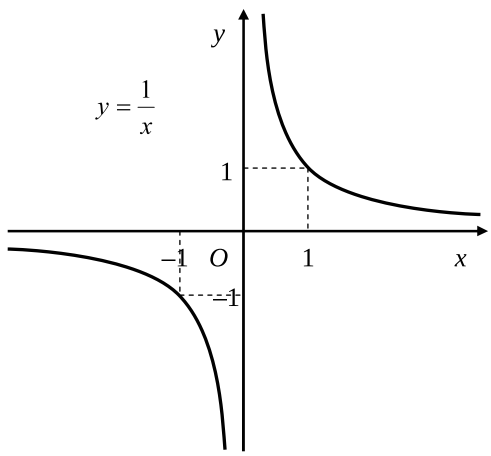












Limiti

Verifiche della correttezza dei limiti

1.	$\lim_{x \to c} f(x) = l$	Si risolve $\forall \varepsilon > 0$ la disequazione $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$ e si verifica che l'insieme S_ε delle soluzioni contenga un intorno completo $(a_\varepsilon; b_\varepsilon)$ di c, c eventualmente escluso. Se $x \to c^+$ è sufficiente che S_ε contenga un intorno destro $(c; b_\varepsilon)$ di c Se $x \to c^-$ è sufficiente che S_ε contenga un intorno sinistro $(a_\varepsilon; c)$ di c.
2.	$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$	Si risolve $\forall \varepsilon > 0$ la disequazione $\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$ e si verifica che l'insieme S_ε delle soluzioni contenga un intorno $(-\infty; a_\varepsilon) \cup (b_\varepsilon; +\infty)$ di ∞. Se $x \to +\infty$ è sufficiente che S_ε contenga un intorno $(b_\varepsilon; +\infty)$ di $+\infty$. Se $x \to -\infty$ è sufficiente che S_ε contenga un intorno $(-\infty; a_\varepsilon)$ di $-\infty$.
3.	$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$	Si risolve $\forall M > 0$ la disequazione $f(x) > M$ e si verifica che l'insieme S_M delle soluzioni contenga un intorno completo $(a_M; b_M)$ di c, c eventualmente escluso. Se $x \to c^+$ è sufficiente che S_M contenga un intorno destro $(c; b_M)$ di c Se $x \to c^-$ è sufficiente che S_M contenga un intorno sinistro $(a_M; c)$ di c.
4.	$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$	Si risolve $\forall M > 0$ la disequazione $f(x) < -M$ e si verifica che l'insieme S_M delle soluzioni contenga un intorno completo di c, c eventualmente escluso, come nel caso precedente. Lo stesso dicasi nei sottocasi $x \to c^+$, $x \to c^-$.
5.	$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$	Si risolve $\forall M > 0$ la disequazione $f(x) > M$ e si verifica che l'insieme S_M delle soluzioni contenga un intorno $(-\infty; a_M) \cup (b_M; +\infty)$ di ∞. Se $x \to +\infty$ è sufficiente che S_M contenga un intorno $(b_M; +\infty)$ di $+\infty$. Se $x \to -\infty$ è sufficiente che S_M contenga un intorno $(-\infty; a_M)$ di $-\infty$.
6.	$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$	Si risolve $\forall M > 0$ la disequazione $f(x) < -M$ e si verifica che l'insieme S_M delle soluzioni contenga un intorno di ∞, come nel caso precedente. Lo stesso dicasi nei sottocasi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

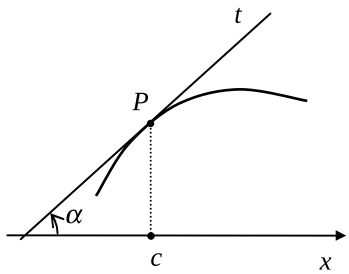
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1 \quad (x \text{ in radianti}) \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad (x \text{ in radianti})$$

Derivate

Derivata di una funzione in un punto

Sia f una funzione definita in un punto c, il limite $f'(c) = \lim_{h\to c}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ quando esiste si chiama **derivata** della funzione nel punto c.



Significato geometrico della derivata

$f'(c) = m_t$ $\quad t$ retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c

$f'(c) = \operatorname{tg}\alpha$

Derivate delle funzioni elementari

Funzione	**Derivata**
$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad (\alpha \in R)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \text{arc cotg } x$ $\quad$ $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$y = a^x$ $\quad$ $y' = a^x \ln a$

$y = e^x$ $\quad$ $y' = e^x$

$y = \log_a x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

$y = \ln x$ $\quad$ $y' = \frac{1}{x}$

$y = \ln|x|$ $\quad$ $y' = \frac{1}{x}$

Regole di derivazione

$y = f(x) \pm g(x)$ $\quad$ $y' = f'(x) \pm g'(x)$

$y = f(x)g(x)$ $\quad$ $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$y = \frac{1}{g(x)}$ $\quad$ $y' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

$y = f[g(x)]$ $\quad$ $y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Integrali

Integrali indefiniti immediati

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + C$$

$$\int \text{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \text{cotg}\, x\, dx = \ln|\text{sen}\, x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C\,, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{m^2+x^2}\, dx = \frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{m} + C$$

$$\int \frac{1}{m^2+(x+k)^2}\, dx = \frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+k}{m} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Regole di integrazione

Integrazione immediata generalizzata

Se F è una primitiva di f allora $\int f(g(x))\ g'(x)\ dx = F(g(x)) + C$

Integrazione per sostituzione

Se $x = g(t)$ è una funzione invertibile e derivabile nel dominio di f e si riesce a calcolare l'integrale $\int f(g(t))\ g'(t)\ dx$, allora

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni derivabili allora $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

Integrali definiti

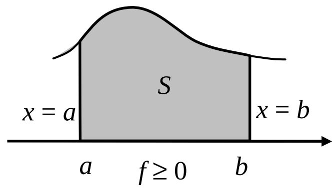
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \left(\text{con } \int f(x)dx = F(x) + c\right)$$

Valor medio di una funzione continua in un intervallo $[a; b]$

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

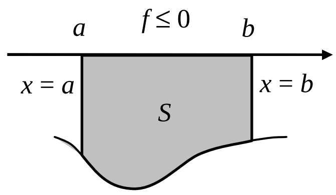
Se $f \geq 0$ nell'intervallo $[a; b]$ **l'area del trapezoide** delimitato dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ è

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



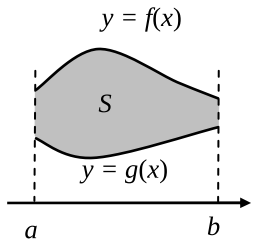
Se $f \leq 0$ nell'intervallo $[a; b]$ **l'area del trapezoide** delimitato dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ è

$$S = -\int_a^b f(x)dx\,.$$



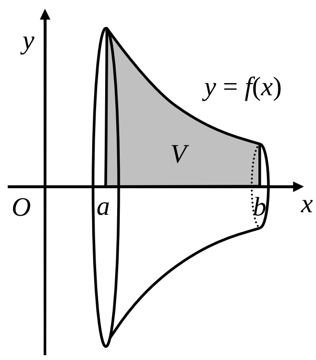
Area della **regione di piano compresa tra i grafici** di due funzioni f e g

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



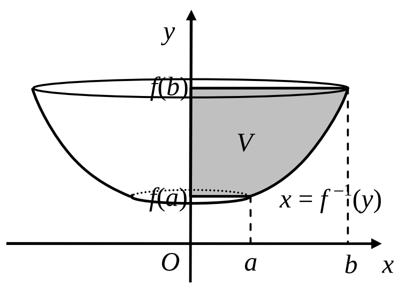
Volume di un solido generato dalla rotazione completa di un trapezoide intorno all'asse x

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

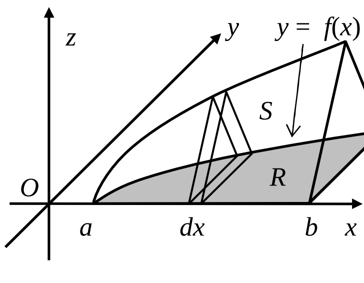


Volume di un solido generato dalla rotazione completa di un trapezoide intorno all'asse y

$$V = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} \left[f^{-1}(y)\right]^2 dy$$



Volume del solido S che ha per base il trapezoide delimitato dal grafico della funzione $f(x) \geq 0$ e dall'intervallo $[a, b]$, le cui sezioni ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte poligoni regolari di n lati



$$V = \frac{n}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

Calcolo combinatorio

Disposizioni semplici di *n* elementi distinti di classe *k* (con *k* ≤ *n*)

$$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fattori}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizione di *n* elementi distinti di classe *k* (con *k* ⋚ *n*)

$$D_{n,k} = n^k$$

Permutazioni semplici di *n* elementi distinti

$$P_{n,k} = D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Combinazioni semplici di *n* elementi distinti di classe *k* (con *k* ≤ *n*)

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Formula di Stifel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Potenza di un binomio:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Progressioni

Progressione aritmetica di ragione d: è una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tale che

$$\forall\, n \geq 1 \quad a_{n+1} - a_n = d.$$

Valgono i seguenti risultati: $\forall\, n \geq 1 \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\forall\, n \geq 1 \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } d > 0 \\ -\infty, & \text{se } d < 0 \\ a_1, & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

Progressione geometrica di ragione q: è una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tale che

$$\forall\, n \geq 1 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$$

Valgono i seguenti risultati: $\forall\, n \geq 1 \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\forall\, n \geq 1 \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} a_1, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{se } |q| < 1 \\ \infty, & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$