Esercizi di Capodanno - Tutorato Analisi 1

Emanuele Fabbiani, Nicola Misericordia, Tomás Pippia

December 30, 2013

1 Equazioni differenziali del secondo ordine

1. Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 10e^{-t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$
Quanto vale $e^{2\pi}y'(\pi)(y(\pi)+1)$?[1]

2. Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(t) + 8y'(t) = -8 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -9 \end{cases}$$
Quanto vale $8y(2) + y'(2)$?[2]

3. Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = 6 \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$
Quanto vale $y(6) + y'(6)$?[3]

4. Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\cos(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
Quanto vale $\ln(y(\pi))$?[4]

[1] [-25, T.E. 22/02/2011 n° 11]
[2] [-17, T.E. 10/06/2010 n° 7]
[3] [42, T.E. 27/01/2011 n° 9]
[4] [$-\pi$]

Nota: per tutti quelli che non sanno dove mettersi le mani per risolvere le equazione del secondo ordine

1. Risolvi l'equazione omogenea, ricavandoti il polinomio caratteristico:
   es: $y'' + 2y' + y = 3t \Rightarrow$ polinomio caratteristico: $x^2 + 2x + 1 = 0$, risolvi questo e hai due soluzioni, diverse a seconda del *delta* dell'equazione (tre casi).

2. Ora, invece, trovi una soluzione particolare alla non omogenea:
   questo lo fai sapendo che:
   Se come termine noto hai un polinomio, di un certo grado, ti basterà considerare un polinomio dello stesso grado come possibile soluzione, con ciascun termine di ogni grado moltiplicato per un certo coefficiente da trovare andando a sostituire la soluzione particolare nell'equazione non omogenea.
   es: $y'' + 2y' + y = 3t$, come soluzione scegli $at + b$, con a e b coefficienti da stabilire; sostituendo nell'equazione non omogenea: $0 + 2a + at + b = 3t$, ne consegue $a = 3,\ b = -6$
   Se come termine noto hai un esponenziale, puoi considerare un esponenziale come soluzione, ae^{bt}, con a e b da determinare.
   Se hai come termine noto $sin(\omega t)$ o $cos(\omega t)$, o una somma di entrambi, puoi considerare come soluzione particolare $asin(\omega t) + bcos(\omega t)$, con a e b coefficienti da determinare.

3. Ultimo passaggio, hai risolto l'omogenea e hai la soluzione dipendente dai coefficienti da determinare, hai trovato una soluzione particolare;
   Ora le sommi ed applichi le due condizioni di Cauchy, all'equazione risultante e alla sua derivata:
   $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ e trovi i due coefficienti specifici della soluzione.