FORMULE RISOLUTIVE PER PROBLEMI DI CAUCHY

Primo grado

Lineari.

$$u' + a(x)u = b(x)$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$u = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} b(x)\,dx$$

NB: Nell'integrale indefinito per calcolare $A(x)$ non è necessario aggiungere la costante "c", che risulterà invece dal secondo integrale, quello della formula risolutiva vera e propria.

Variabili separabili.

$$u' = a(x)u$$

$$\frac{du}{dx} = a(x)u$$

$$\frac{du}{u} = a(x)dx$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int a(x)\,dx$$

NB: Si può considerare una sola costante "c", anche se gli integrali sono due.

Secondo Grado

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

dove a e b sono numeri reale e $g(x)$ è una funzione nell'incognita x.

Le soluzioni sono nella forma

$$y = y_h + y_p$$

dove y_h è la soluzione generale, y_p una soluzione particolare.

Imposto l'equazione:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Si possono presentare tre casi:

$\triangle > 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\triangle}}{2}$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$\triangle = 0$.

$$\lambda_{1=}\lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

$\triangle < 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{|\triangle|} \cdot i}{2}$$

$$\alpha = \frac{-a}{2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{|\triangle|}}{2}$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \sin(\omega x) + C_2 e^{\alpha x} \cos(\omega x)$$

Per trovare una soluzione particolare non esistono regole universali: solo la considerazione che sarà una funzione dello stesso tipo di $g(x)$.
Se $g(x)$ è un polinomio, allora y_p sarà un polinomio.
Se $g(x)$ è un'esponenziale, allora y_p sarà un'esponenziale.
And so on...

ATTENZIONE!
In tutti i casi di cui sopra, dopo aver risolto l'equazion differenziale, occorre usare le condizioni per determinare le costanti "c" e "C".