RISOLUZIONE DELLO SCRITTO DEL 15 GENNAIO 2013

E. F.

Contents

1. Studio di Funzione

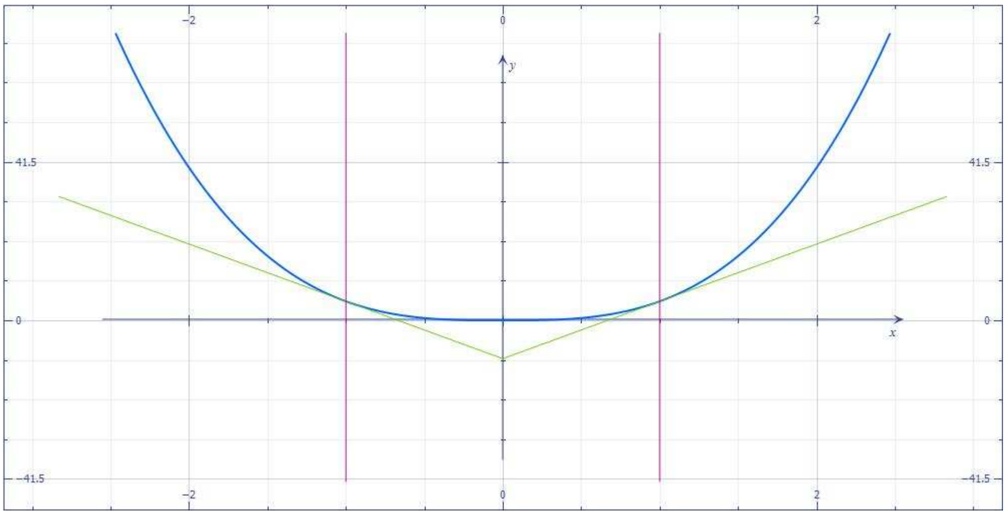
1.1. **Esercizio 1 (3 pti).**

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2\,|x| + \left[\frac{1}{5}e^{-5|x|}\right] & |x| \le 1 \\ 15\,|x| - 10 & |x| > 1 \end{cases}$$

Innanzitutto cerco di semplificare la funzione.
Sospetto che il termine racchiuso nella parte positiva nasconda qualcosa.
In effetti è così: la funzione $\frac{1}{5}e^{-5|x|}$, nell'intervallo $[-1;1]$, è sempre positiva e raggiunge, nel punto $x = 0$, un massimo pari a $\frac{1}{5}$. La parte positiva di questa quantità, quindi, è sempre pari a zero nell'intervallo considerato.
Tenendo conto di questo, la funzione diventa:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2\,|x| & |x| \le 1 \\ 15\,|x| - 10 & |x| > 1 \end{cases}$$

E' ora abbastanza semplice tracciare un grafico qualitativo: una funzione cubica solo positiva (una parabola più ripida) in $[-1;1]$ e due semirette inclinate verso l'alto all'esterno di tale intervallo



Dove, all'interno delle linee verticali deve essere considerata la curva blu, all'esterno quella verde.
Il grafico dice - quasi - tutto: l'unico punto su cui potrebbero rimanere dubbi è la derivabilità.
Allora calcolo derivata destra e sinistra in 1 (in -1 il risultato sarà analogo per simmetria):
$f'_+(1) = 15$
$f'_-(1) = 15(1)^2 = 15$
Si capisce che la funzione:
è continua SI
è derivabile SI
è periodica NO
è inferiormente limitata SI
è superiormente limitata NO
è monotona NO

è pari SI
è dispari NO.

2. Limiti

2.1. Esercizio 2 (3 pti).

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin^2(4x^2)}{x^3(1-e^x)}+\frac{2(\cos(4x^2)-1)}{x^2\ln(1-4x^2)}+\sqrt[4]{x}\cdot\ln(x^4)\right)=$$

Secondo il Teorema di *Algebra dei limiti* il limite della somma è la somma dei limiti. Quindi posso risolvere separatamente i tre limiti e poi effettuare la somma.
Per la prima parte uso gli *Sviluppi* per ottenere una frazione di polinomi, quindi sfrutto la *Regola dei gradi*:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2(4x^2)}{x^3(1-e^x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(4x^2)^2}{x^3(1-1-x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{16x^4}{-x^4}=-16$$

Idem per la seconda parte:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2(\cos(4x^2)-1)}{x^2\ln(1-4x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2(1-\frac{(4x^2)^2}{2}-1)}{x^2(-4x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-16x^4}{-4x^4}=4$$

La terza parte consiste nel prodotto tra una funzione potenza che tende a zero e un logaritmo che tende a meno infinito. Per la *Gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi* vince la potenza, quindi il risultato del limite è zero:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{x}\cdot\ln(x^4)=0$$

Ora, $-16+4+0=-12$.

2.2. Esercizio 3 (2 pti).

$$\lim_{X\to +\infty}\left(\frac{10+x-10x^2}{5x^2+10x+1}+e^{-5x}\cdot\sin^2(10x)+10\cos\left(\frac{10}{x}+2\pi\right)\right)=$$

Come in precedenza risolvo le varie parte del limite separatamente, poi sommo i risultati parziali.
La prima parte è un rapporto tra polinomi di pari grado. Per la *Regola dei gradi*, il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado maggiore:

$$\lim_{X\to +\infty}\frac{10+x-10x^2}{5x^2+10x+1}=\frac{-10}{5}=-2$$

La seconda è un prodotto tra una funzione infinitesima ed una limitata. Per il *Teorema*, il risultato del limite è zero:

$$\lim_{X\to +\infty}e^{-5x}\cdot\sin^2(10x)=0$$

La terza si risolve per sostituzione:

$$\lim_{X\to+\infty} 10\cos\left(\frac{10}{x}+2\pi\right) = 10\cos(0+2\pi) = 10$$

Ora, $-2+0+10 = 8$.

3. Derivate

3.1. **Esercizio 4 (2 pti).**

$$y = 6x^2 + \cos(6(x+2)) - 6\ln(3+x)$$

La parte significativa dell'esercizio riguarda il calcolo del coefficiente angolare della retta tangente. Esso è la derivata della funzione nel punto assegnato.

$$f'(x) = 12x - 6\sin(6x+12) - 6\cdot\frac{1}{3+x}$$
$$f'(-2) = 12\cdot(-2) - 6\sin(-12+12) - 6 = -24+0-6 = -30$$

Ora si applica la formula della *Retta tangente*:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) =$$
$$25 + (-30)(x+2) = 25 - 30x - 60 = -30x - 35$$

Quindi $g(0) = 0 - 35 = -35$.

3.2. **Esercizio 5 (2 pti).**

$$f(x) = (8+\arctan x)^{2\sin(8x)+8x}$$

La funzione è del tipo $h(x)^{g(x)}$. Conviene trasformarla in un'esponenziale, in modo tale da poter poi sfruttare le *Proprietà dei logaritmi.* Sfrutto l'identità $h(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(h(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\ln(h(x))}$.
Poi derivo - le funzioni non riportano le variabili per comodità:

$$f'(x) = e^{g\ln(h)}\cdot\left(g'\ln(h) + g\cdot\frac{1}{h}\cdot h'\right) =$$

$$= (8+\arctan x)^{2\sin(8x)+8x}\cdot\left((16\cos(8x)+8)\cdot\ln(8+\arctan(8x)) + (2\sin(8x)+8x)\cdot\frac{1}{8+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f'(0) = 8^0\cdot((16+8)\ln(8)+0) = 24\ln 8$$

Ora, $\frac{24\ln 8}{\ln 8} = 24$.

3.3. **Esercizio 7 (2 pti).**

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$$

Per trovare minimi e massimi ricorro allo *Studio del segno della derivata prima*:

$$f'(x) = \frac{5\left(x^2+4\right) - 5x(2x)}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{5x^2+20-10x^2}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi mi concentro sul numeratore:

$$20 - 5x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

La derivata è positiva, e quindi la funzione è crescente, in $[-2; 2]$.
Ne consegue che $x_m = -2$ e $x_M = 2$.
Ora, $8f(-2) - 4f(2) = -8 \cdot \frac{10}{8} - 4 \cdot \frac{10}{8} = -10 - 5 = -15$.

4. Integrali

4.1. **Esercizio 8 (2 pti).**

$$J = \int_{-1}^{+\infty} g(x)dx$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x+3 & x \leq 0 \\ \frac{3}{(x+1)^4} & x > 0 \end{cases}$$

La funzione da integrare è definita a tratti: devo quindi spezzare J nella somma di due integrali, di cui uno improprio.

$$J = \int_{-1}^{0} 3x + 3\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{3}{(x+1)^4}\,dx = \int_{-1}^{0} 3x+3\,dx + \int_{0}^{+\infty} 3(x+1)^{-4}\,dx =$$

$$= \left[3\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3(x+1)^{-3}}{-3}\right]_{0}^{+\infty} =$$

$$= \left(0 - 0 - \left(\frac{3}{2} - 3\right)\right) + (0 - (-1)) = -\frac{3}{2} + 3 + 1 = \frac{5}{2}$$

Ora, $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$.

4.2. **Esercizio 11 (3 pti).**

$$I = \int_{1}^{-1} \left(8\pi\,|x|\cos(\pi x) + x^2\arctan(8x) - \frac{8}{\pi}\right)\,dx$$

Il dominio di integrazione è un intervallo simmetrico rispetto all'origine: conviene quindi dare la caccia ad eventuali funzioni pari e dispari.

Nello specifico, la prima funzione è un prodotto di funzioni pari, ed è quindi PARI.

La seconda: pari per dispari risulta DISPARI.

La terza è PARI.
Per le proprietà degli *Integrali di funzioni simmetriche* posso dunque affermare che:

$$\int_{1}^{-1} 8\pi\,|x|\cos(\pi x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{1} 8\pi x\cos(\pi x)\,dx$$

$$\int_{1}^{-1} x^2\arctan(8x)\,dx = 0$$

Tenendo conto della *Linearità dell'integrale*, devo quindi risolvere:

$$I = 2\cdot\int_{0}^{1} 8\pi x\cos(\pi x)\,dx + \int_{1}^{-1} -\frac{8}{\pi}\,dx$$

Per il primo integrale uso la *Formula per parti:*

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$$16\pi\int_{0}^{1} x\cos(\pi x)\,dx = 16\pi\left[x\cdot\frac{\sin(\pi x)}{\pi} - \int 1\cdot\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,dx\right]_0^1 =$$

$$= 16\pi\left[\frac{x\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = 16\pi\left(0 - \frac{1}{\pi^2} + 0 - \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{-32}{\pi}$$

Per il secondo, osservo che la funzione da integrare è una costante: il risultato sarà quindi il valore della funzione moltiplicato per la lunghezza dell'intervallo di integrazione:

$$\int_{1}^{-1} -\frac{8}{\pi}\,dx = -\frac{8}{\pi}\cdot 2 = \frac{-16}{\pi}$$

Ora, $\pi\cdot\left(-\frac{32}{\pi} - \frac{16}{\pi}\right) = -48$.

5. Equazioni Differenziali

5.1. Esercizio 12 (2 pti).

$$\begin{cases} x^2u'(x) - 16 = xu(x) & \forall x > 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto voglio che il termine derivato (u') non abbia coefficienti:

$$u'(x) - \frac{u(x)}{x} = \frac{16}{x^2}$$

Ora utilizzo la *Formula risolutiva*:

$$u(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx$$

dove

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln(x)$$

$$b(x) = \frac{16}{x^2}$$

Quindi

$$u(x) = e^{\ln(x)} \int e^{-\ln(x)} \cdot \frac{16}{x^2}\, dx = x \int \frac{1}{x} \cdot \frac{16}{x^2}\, dx = 16x \int x^{-3}\, dx = 16x \left(\frac{x^{-2}}{-2} + c \right) =$$

$$= 16x \left(-\frac{1}{2x^2} + c \right)$$

Ora devo determinare c utilizzando la condizione:

$$u(1) = 0 \iff 16 \cdot 1 \left(-\frac{1}{2} + c \right) = 0 \iff -8 + 16c = 0 \iff c = \frac{1}{2}$$

Quindi $u(x) = 16x \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{8}{x} + 8x$.
Ora, $2u(2) = 2 \cdot (-4 + 16) = -24$.

5.2. **Esercizio 10 (3 pti).**

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = 18t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -17 \end{cases}$$

Uso il procedimento risolutivo: sostituisco agli indici di derivata gli elevamenti a potenza e risolvo l'equazione di secondo grado, ignorando i termini senza la "y":

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 1$$

La soluzione generale è dunque:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^0 + c_2 e^t = c_1 + c_2 e^t$$

Devo ora ricavare una soluzione particolare. Osservo che la funzione a destra dell'uguale è un polinomio.
Provo allora con una funzione dello stesso tipo, $at^2 + bt + c$:

$$(at^2 + bt + c)'' + (at^2 + bt + c)' = 18t$$

$$2a + 2at + b = 18t$$

$$\begin{cases} 2a = 18 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 9 \\ 18 + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 9 \\ b = -18 \end{cases}$$

Una soluzione particolare è quindi $y_p = 9t^2 - 18t$.
La soluzione risulta essere $y(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2e^t + 9t^2 - 18t$.
Devo ora determinare c_1e $c_2$con le condizioni:

$$y = c_1 + c_2e^t + 9t^2 - 18t$$

$$y' = c_2e^t + 18t - 18$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2e^0 + 9 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 = 1 \\ c_2e^0 + 18 \cdot 0 - 18 = -17 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione definitiva è $y(t) = e^t + 9t^2 - 18t$ e la sua derivata è $y'(t) = e^t + 18t - 18$.
Ora, $y'(1) - y(1) = e + 18 - 18 - e + 9 - 18 = -9$.

6. Quattro Punti

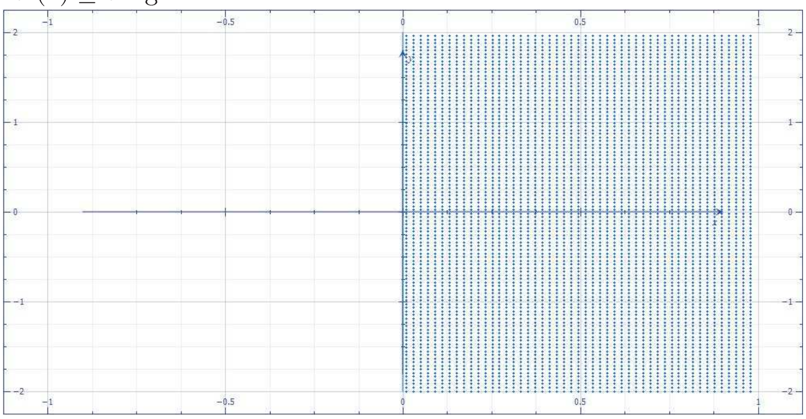
ATTENZIONE!
Gli esercizi da quattro punti NON sono standard: sono il parto della mente malvagia del vostro docente e cambiano di appello in appello.
In una parola, sono imprevedibili.
In realtà, a volte si ripetono gli argomenti toccati, più di rado la forma con cui si presentano.
Affrontare quelli proposti negli anni precedenti è SEMPRE un buon esercizio, tuttavia all'esame dovrete far affidamento sulla vostra preparazione, sulla vostra intuizione ed sul vostro talento.
IN BOCCA AL LUPO!

6.1. **Esercizio 6 (4 pti).**

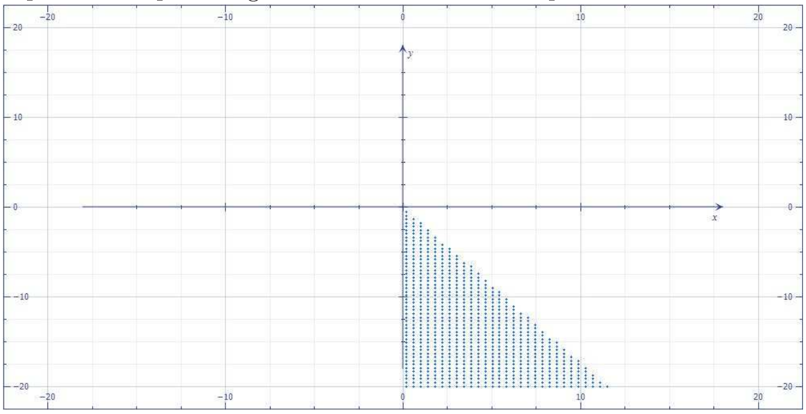
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ ||z| - 7| \leq 2; \ Re(z) \geq 0; \ Re(z^3) \geq 0 \right\}$$

Sempra spaventoso; in realtà si tratta solo di disegnare un insieme nel paino complesso.
Devo soddisfare tre condizioni. Inizio dalla più semplice:

- $Re(z) \leq 0$ significa considerare solo ciò che sta a destra dell'asse Y.



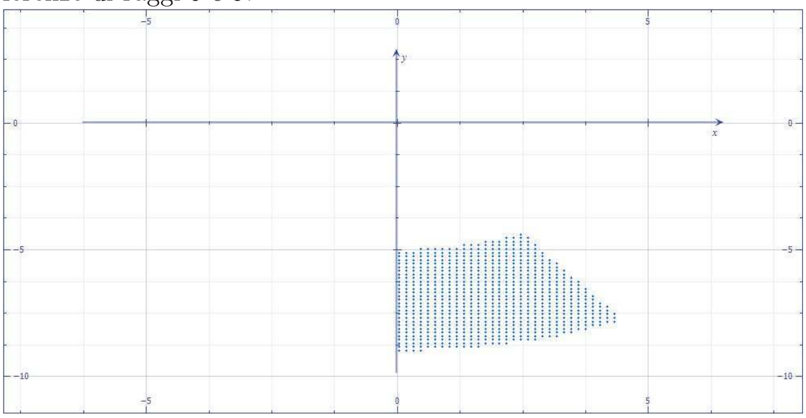
- $Re(z^3) \geq 0$. E' utile ricordare qui il significato geometrico dell'elevamento a potenza dei numeri complessi: una rotazione composta con un'omotetia. La seconda parte non interessa: basta considerare che, se un numero complesso forma un angolo θ con l'asse reale, la sua terza potenza forma un angolo 3θ.
  Quindi, per soddisfare la condizione, devo dividere l'insieme rappresentato sopra in tre spicchi uguali e considerare solo il primo.



- $||z| - 7| \leq 2$. Scritto così non dice molto: risolvo il modulo più esterno, ma non quello interno.

$$-2 \leq |z| - 7 \leq 2 \Longleftrightarrow 5 \leq |z| \leq 9.$$

  Significa che la distanza di z dall'origine - il suo modulo - deve essere compresa tra 5 e 9. Nel grafico questo mi suggerisce di considerare solo gli elementi dell'insieme precedente che si trovino compresi tra due circonferenze di raggi 5 e 9.

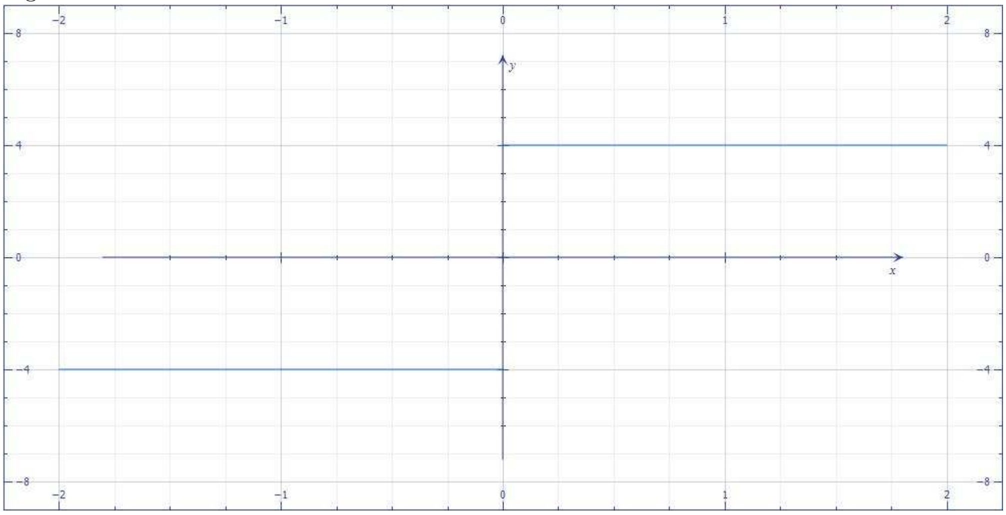


Fine! Ora devo solo calcolare l'area della figura rappresentata, ovvero un sesto di corona circolare... Geometria da liceali!
$A(a) = \frac{1}{6} \cdot \left(9^2\pi - 5^2\pi\right) = \frac{56}{6}\pi = \frac{28}{3}\pi$.
Ora, $\frac{3}{\pi} \cdot \frac{28\pi}{3} = 28$.

6.2. **Esercizio 9 (4 pti).**

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} 4sign(t)\, dt$$

Conviene ragionare per grafici: comincio ad abbozzare quello della funzione da integrare.

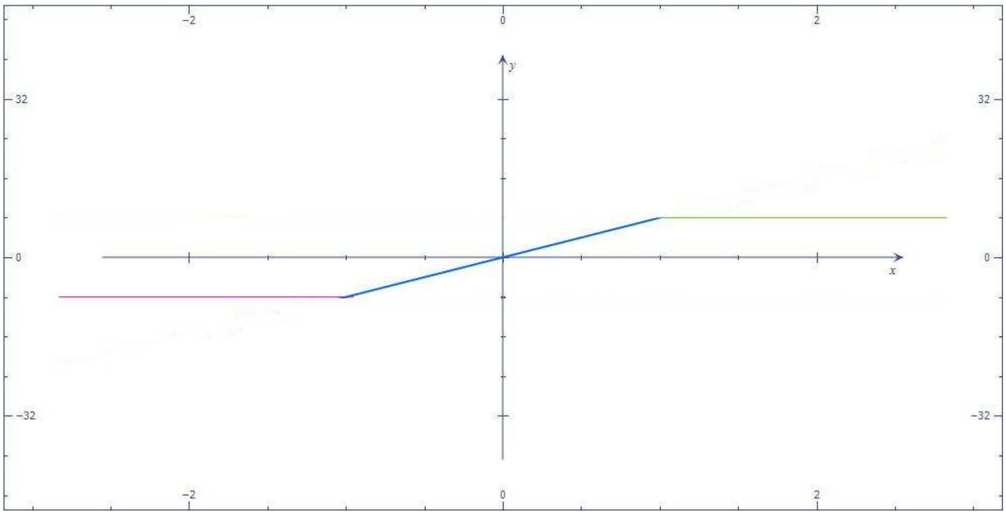


Ora devo intuire quale sarà il comportamento di $F(x)$.
Pensando al *Significato geometrico dell'integrale*, si tratta di individuare l'area sottesa al grafico in un intervallo di lunghezza 2. Fintanto che l'intervallo non comprende l'origine, non ci sono problemi. Quando accade, invece, devo tener conto della discontinuità della funzione e spezzare l'integrale.

$$F(x) = \begin{cases} \int_{x-1}^{x+1} 4\, dx & x > 1 \\ \int_{0}^{x+1} 4\, dx + \int_{x-1}^{0} -4\, dx & x \in [-1;1] \\ \int_{x-1}^{x+1} -4\, dx & x < -1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2 \cdot 4 & x > 1 \\ 4x + 4 + 4x - 4 & x \in [-1;1] \\ 2 \cdot (-4) & x < -1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 8 & x > 1 \\ 8x & x \in [-1;1] \\ -8 & x < -1 \end{cases}$$



Ora è facile:

$$\int_{-1}^{4} F(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 8x\,dx + \int_{1}^{4} 8\,dx = 24.$$