1.6 Esercizi

1. *Scrivere il termine generale* a_n *delle seguenti successioni e calcolare* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*:*

   a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ b) $-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \dots$ c) $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$

2. *Studiare il comportamento delle seguenti successioni e, nel caso esista, calcolarne il limite:*

   a) $a_n = n(n-1)\,, \quad n \ge 0$
   b) $a_n = \dfrac{n+5}{2n-1}\,, \quad n \ge 0$
   c) $a_n = \dfrac{2+6n^2}{3n+n^2}\,, \quad n \ge 1$
   d) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt[3]{n}}\,, \quad n \ge 0$
   e) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}\,, \quad n \ge 0$
   $\boxed{\text{f)}}$ $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n^2}{n^2+1}\,, \quad n \ge 0$
   g) $a_n = \arctan 5n\,, \quad n \ge 0$
   $\boxed{\text{h)}}$ $a_n = 3 + \cos n\pi\,, \quad n \ge 0$
   $\boxed{\text{i)}}$ $a_n = 1 + (-1)^n \sin \dfrac{1}{n}\,, \quad n \ge 1$
   $\boxed{\ell)}$ $a_n = \dfrac{n \cos n}{n^3+1}\,, \quad n \ge 0$
   m) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}\,, \quad n \ge 0$
   $\boxed{\text{n)}}$ $a_n = \dfrac{\log(2+e^n)}{4n}\,, \quad n \ge 1$
   o) $a_n = -3n + \log(n+1) - \log n\,, \; n \ge 1$
   p) $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}\,, \quad n \ge 1$

3. *Studiare il comportamento delle seguenti successioni:*

   a) $a_n = n - \sqrt{n}$
   b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2+2}}$
   $\boxed{\text{c)}}$ $a_n = \dfrac{3^n - 4^n}{1+4^n}$
   d) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
   $\boxed{\text{e)}}$ $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$
   f) $a_n = \dbinom{n}{3} \dfrac{6}{n^3}$
   $\boxed{\text{g)}}$ $a_n = \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)^{\sqrt{n^2+2}}$
   $\boxed{\text{h)}}$ $a_n = 2^n \sin(2^{-n}\pi)$
   $\boxed{\text{i)}}$ $a_n = n \cos \dfrac{n+1}{n} \dfrac{\pi}{2}$
   $\ell)$ $a_n = n! \left(\cos \dfrac{1}{\sqrt{n!}} - 1\right)$

4. *Dire se le seguenti serie convergono; in caso affermativo, calcolarne la somma:*

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
   $\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k+5}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \tan k$

$\boxed{\text{d)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n+1} \right)$

$\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 3^{-k}}$

$\boxed{5.}$ *Utilizzando la serie geometrica, scrivere il numero* $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ *come rapporto di interi.*

6. *Trovare i valori del parametro reale x per i quali le seguenti serie convergono. Per tali valori di x, calcolare la somma della serie:*

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{5^k}$

$\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k (x+2)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

$\boxed{\text{d)}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \tan^k x$

$\boxed{7.}$ *Trovare i valori del parametro reale c per i quali si ha*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (1+c)^{-k} = 2\,.$$

$\boxed{8.}$ *Si supponga che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *($a_k \neq 0$) sia convergente. Mostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ *non può convergere.*

9. *Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini positivi:*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2k^2+1}$

$\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k^5 - 3}$

$\boxed{\text{c)}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$

$\boxed{\text{d)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

$\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \arcsin \frac{7}{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{5}{k^2} \right)$

$\boxed{\text{g)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k}$

$\boxed{\text{h)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1}$

$\boxed{\text{i)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$

ℓ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + 3^k}{2^k}$

m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{\sqrt[3]{k^9 + k^2}}$

$\boxed{\text{n)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k\sqrt{k}}$

10. *Trovare i valori del parametro reale p per cui converge la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$.

11. *Stimare la somma s della serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$ *utilizzando la somma dei primi 6 termini.*

12. *Studiare la convergenza delle seguenti serie a termini di segno alterno:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \log\left(\frac{1}{k}+1\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{k^3+3}{2k^3-5}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi + \frac{1}{k}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3k}{4k-1}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k^3+1}$

13. *Verificare che le seguenti serie sono convergenti. Determinare il numero minimo n di termini necessari affinché la ridotta n-esima s_n approssimi la somma a meno dell'indicata accuratezza:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$, $|r_n| < 10^{-3}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$, $|r_n| < 10^{-2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4^k}$, $|r_n| < 2 \cdot 10^{-3}$

14. *Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k^4}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 3k}{k^3}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+3}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{6}}{k\sqrt{k}}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 5^{k-1}}{(k+1)^2\, 4^{k+2}}$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{(k+2)\, 5^{2k+1}}$

15. *Studiare la convergenza delle seguenti serie:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{k^3}\right)$ $\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\binom{k}{2}$ $\boxed{\text{d)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sqrt[k]{2}-1\right)$

$\boxed{\text{e)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-1}{2k+1}$

16. *Verificare la convergenza delle seguenti serie e calcolarne la somma:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{k-1}}{5^k}$ $\boxed{\text{b)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{2\cdot 4^{2k}}$

$\boxed{\text{c)}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

1.6.1 Soluzioni

1. *Termine generale e limite di successioni:*

a) $a_n=\dfrac{n}{n+1}\,,\ n\ge 1\,,\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=1$

b) $a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{3^n}\,,\ n\ge 1\,,\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=0$

c) $a_n=\sqrt{n}\,,\ n\ge 0\,,\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

2. *Studio del comportamento di successioni e calcolo del limite:*

a) Diverge a $+\infty$. b) Converge a $\frac{1}{2}$. c) Converge a 6.

d) Converge a 1. e) Diverge a $+\infty$.

f) Osserviamo che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$, pertanto la successione assegnata è indeterminata in quanto

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{(2n)^2}{(2n)^2+1}=-1\,,\qquad \lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1}=1\,.$$

g) Converge a $\frac{\pi}{2}$.

h) Ricordando che $\cos n\pi=(-1)^n$, si conclude immediatamente che la successione è indeterminata.

i) Poiché $\{\sin\frac{1}{n}\}_{n\ge1}$ è una successione infinitesima e $\{(-1)^n\}_{n\ge1}$ è una successione limitata, si ha

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}=0$$

e dunque la successione assegnata converge a 1.

ℓ) Si ha

$$\left|\frac{n\cos n}{n^3+1}\right| \le \frac{n}{n^3+1} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}\,, \qquad \forall n \ge 1\,.$$

Pertanto, per il Criterio del confronto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cos n}{n^3+1} = 0\,.$$

m) Converge a 0.

n) Risulta

$$\frac{\log(2+\mathrm{e}^n)}{4n} = \frac{\log \mathrm{e}^n(1+2\mathrm{e}^{-n})}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{\log(1+2\mathrm{e}^{-n})}{4n}$$

e dunque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

o) Diverge a $-\infty$. p) Converge a 0.

3. *Comportamento di successioni:*

a) Diverge a $+\infty$. b) Indeterminata.

c) Ricordando il comportamento della successione geometrica (Esempio 1.1 i)) si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right)}{4^n(4^{-n}+1)} = -1\,;$$

quindi la successione converge a -1.

d) Diverge a $+\infty$.

e) Scriviamo

$$a_n = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}{n(n+1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdots\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+1}{1} > n+1\,,$$

poiché $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, per il secondo Teorema del confronto (caso infinito), si deduce che la successione diverge a $+\infty$.

f) Converge a 1.

g) Poiché

$$a_n = \exp\left(\sqrt{n^2+2}\,\log\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2}\right)\,,$$

studiamo la successione

$$b_n = \sqrt{n^2+2}\,\log\frac{n^2-n+1}{n^2+n+2} = \sqrt{n^2+2}\,\log\left(1-\frac{2n+1}{n^2+n+2}\right)\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+n+2} = 0$$

e quindi

$$\log\left(1-\frac{2n+1}{n^2+n+2}\right) \sim -\frac{2n+1}{n^2+n+2}\,, \qquad n\to\infty\,.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}\,(2n+1)}{n^2+n+2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = -2\,;$$

dunque la successione $\{a_n\}$ converge a e^{-2}.

h) Posto $x = 2^{-n}\pi$, osserviamo che $x \to 0^+$ per $n \to \infty$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to 0^+} \pi \frac{\sin x}{x} = \pi$$

e la successione $\{a_n\}$ converge a π.

i) Osserviamo che

$$\cos \frac{n+1}{n}\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -\sin\frac{\pi}{2n}\,;$$

quindi, posto $x = \frac{\pi}{2n}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{\pi}{2n} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2}\frac{\sin x}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

e la successione $\{a_n\}$ converge a $-\pi/2$.

ℓ) Converge a $-1/2$.

4. *Studio della convergenza di serie e calcolo della loro somma:*

a) Converge e la somma vale 6.

b) Osserviamo che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+5} = 2 \neq 0\,.$$

Dunque la serie non converge ma diverge a $+\infty$.

c) Non converge.

d) Si tratta di una serie telescopica; risulta

$$\begin{aligned} s_n &= (\sin 1 - \sin\frac{1}{2}) + (\sin\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{3}) + \cdots + (\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}) \\ &= \sin 1 - \sin\frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sin 1$, la serie converge e la sua somma vale $\sin 1$.

e) Si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k+2^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{7}{2}\,.$$

Pertanto la serie converge e la somma vale $7/2$.

f) Non converge.

5. Possiamo scrivere

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)$$

$$= 2.3 + \frac{17}{10^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{2k}} = 2.3 + \frac{17}{10^3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{23}{10} + \frac{17}{1000}\,\frac{100}{99}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}\,.$$

6. *Studio della convergenza di serie e calcolo della loro somma:*

a) Converge per $|x| < 5$ e la somma vale $s = \frac{x^2}{5(5-x)}$.

b) Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 3(x+2)$; dunque si ha convergenza se $|3(x+2)| < 1$, ossia se $x \in (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$. Per tali valori di x, la somma vale
$$s = \frac{1}{1-3(x+2)} - 1 = -\frac{3x+6}{3x+5}\,.$$

c) Converge per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e la somma vale $s = \frac{1}{x-1}$.

d) La serie è una serie geometrica di ragione $q = \tan x$; pertanto si ha convergenza se $|\tan x| < 1$, ossia per $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Per tali valori di x, la somma vale $s = \frac{1}{1-\tan x}$.

7. La serie è una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{1+c}$, la quale converge se $|1+c| > 1$, ossia se $c < -2$ oppure $c > 0$. Per tali valori si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty}(1+c)^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-c}} - 1 - \frac{1}{1-c} = \frac{1}{c(1+c)}\,.$$

Imponendo la condizione $\frac{1}{c(1+c)} = 2$, si ottiene $c = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Ricordando che il parametro c varia nell'insieme $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, si conclude che l'unico valore ammissibile è $c = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

8. Poiché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, vale la condizione necessaria $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Pertanto $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{a_k}$ non può valere 0 e dunque la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ non può convergere.

9. *Studio della convergenza di serie a termini positivi:*

a) Converge.

b) Osserviamo che il termine generale a_k tende a $+\infty$ per $k \to \infty$. Pertanto per la Proprietà 1.6 la serie diverge positivamente. In alternativa, è possibile utilizzare il Criterio della radice 1.15.

c) Applichiamo il Criterio del rapporto 1.14:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{3^k};$$

scrivendo $(k+1)! = (k+1)k!$ e semplificando, si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{k+1} = 0\,.$$

Ne segue che la serie converge.

d) Applichiamo nuovamente il Criterio del rapporto 1.14:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1\,.$$

Dunque la serie converge.

e) Osserviamo che

$$a_k \sim k\frac{7}{k^2} = \frac{7}{k} \qquad \text{per} \qquad k \to \infty\,.$$

Pertanto, applicando il Criterio del confronto asintotico 1.12 e ricordando che la serie armonica diverge, possiamo concludere che la serie data diverge.

f) Converge.

g) Osserviamo che $\log k > 1$ per $k \geq 3$, così

$$\frac{\log k}{k} > \frac{1}{k}\,, \qquad k \geq 3\,.$$

Per il Criterio del confronto 1.10 possiamo concludere che la serie diverge.
In alternativa, si può osservare che la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ è positiva e continua per $x > 1$. Inoltre, dallo studio del segno della derivata prima, si vede che è decrescente per $x > \mathrm{e}$. È possibile dunque applicare il Criterio integrale 1.17:

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty} \int_3^c \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{2}\Big|_3^c \\ &= \lim_{c\to+\infty} \frac{(\log c)^2}{2} - \frac{(\log 3)^2}{2} = +\infty\end{aligned}$$

e concludere che la serie assegnata diverge.

h) La serie converge per il Criterio del confronto asintotico 1.12, in quanto

$$\frac{1}{2^k - 1} \sim \frac{1}{2^k}\,, \qquad k \to +\infty\,,$$

e la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge.

i) La serie diverge per il Criterio del confronto asintotico 1.12, in quanto

$$\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}\,, \qquad k \to +\infty\,,$$

e la serie armonica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

ℓ) Diverge.

m) Converge.

n) La serie converge per il Criterio del confronto 1.10, in quanto

$$\frac{\cos^2 k}{k\sqrt{k}} \le \frac{1}{k\sqrt{k}}\,, \qquad k \to +\infty\,,$$

e la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge.

10. Converge per $p > 1$.

11. Calcoliamo $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ con $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, funzione positiva, decrescente e continua in $[0, +\infty)$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_n^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{n}{2}\,.$$

Poiché

$$s_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{40} = 0.7614\,,$$

utilizzando la (1.8)

$$s_6 + \int_7^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le s \le s_6 + \int_6^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

otteniamo $0.9005 \le s \le 0.9223$.

12. *Studio della convergenza di serie a termini di segno alterno:*

a) Converge semplicemente.

b) Non converge.

c) Poiché

$$\sin\left(k\pi + \frac{1}{k}\right) = \cos(k\pi)\,\sin\frac{1}{k} = (-1)^k \sin\frac{1}{k}\,,$$

la serie assegnata è a termini di segno alterno con $b_k = \sin\frac{1}{k}$. Risulta

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{k+1} < b_k\,.$$

Pertanto, per il Criterio di Leibniz 1.20, la serie converge. Osserviamo che la serie non converge assolutamente in quanto $\sin\frac{1}{k} \sim \frac{1}{k}$ per $k \to \infty$, dunque la serie dei valori assoluti si comporta come la serie armonica, che diverge.

d) La serie converge assolutamente in quanto, usando l'equivalenza fondamentale $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, per $x \to 0$, si ha

$$\left|(-1)^k \left(\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\sqrt{2}} - 1\right)\right| \sim \frac{\sqrt{2}}{k^2}\,, \qquad k \to \infty\,,$$

e quindi, ricordando l'Esempio 1.11 i), possiamo applicare il Criterio del confronto asintotico 1.12 alla serie dei valori assoluti.

e) Non converge.

f) È una serie a segni alterni con $b_k = \dfrac{k^2}{k^3+1}$. È immediato verificare che

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0\,.$$

Non è invece ovvio che la successione b_k sia definitivamente decrescente. Per dimostrarlo, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}\,,$$

e studiamone la monotonia. Poiché

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

e siamo interessati soltanto ai valori di x positivi, otteniamo che $f'(x) < 0$ se $2 - x^3 < 0$, ossia se $x > \sqrt[3]{2}$. Dunque, f è decrescente nell'intervallo $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. Ciò significa che $f(k+1) < f(k)$, e perciò, $b_{k+1} < b_k$, per $k \geq 2$. In definitiva, per il Criterio di Leibniz 1.20, la serie converge.

13. *Approssimazioni di serie:*

a) $n = 5$.

b) Si tratta di una serie a segni alterni con $b_k = \frac{2^k}{k!}$. Si ha immediatamente $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$; inoltre risulta $b_{k+1} < b_k$ per ogni $k > 1$ in quanto

$$b_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} < \frac{2^k}{k!} = b_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{k+1} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k > 1\,.$$

Imponendo la condizione $b_{n+1} < 10^{-2} = 0.01$, si può verificare che risulta

$$b_7 = \frac{8}{315} = 0.02\,, \qquad b_8 = \frac{2}{315} = 0.006 < 0.01\,.$$

Pertanto il minimo numero di termini necessari è $n = 7$.

c) $n = 5$.

14. *Studio della convergenza assoluta di serie:*

a) Si ha convergenza semplice ma non assoluta. Infatti, la serie a segni alterni converge per il Criterio di Leibniz 1.20, mentre la serie dei valori assoluti è una serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.

b) Non converge.

c) La serie converge assolutamente, come si vede facilmente utilizzando ad esempio il Criterio del rapporto 1.14:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1\,.$$

d) La serie converge assolutamente in quanto la serie dei valori assoluti converge per il Criterio del confronto 1.10:

$$\left|\frac{\cos 3k}{k^3}\right| \le \frac{1}{k^3}\,, \qquad \forall k \ge 1\,.$$

e) Converge semplicemente ma non assolutamente.

f) Converge assolutamente.

g) La serie non converge in quanto il termine generale non tende a 0.

h) Converge assolutamente.

15. *Studio della convergenza di serie:*

a) Converge.

b) Osserviamo che

$$\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}\,, \qquad \text{per ogni } k > 0\,;$$

la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge e dunque, applicando il Criterio del confronto 1.10, anche la serie dei valori assoluti converge. Pertanto la serie data converge assolutamente.

c) Diverge.

d) Si tratta di una serie a termini di segno alterno con $b_k = \sqrt[k]{2} - 1$. La successione $\{b_k\}_{k\ge 1}$ è decrescente, essendo $\sqrt[k]{2} > \sqrt[k+1]{2}$ per ogni $k \ge 1$. Dunque possiamo applicare il Criterio di Leibniz 1.20 e concludere che la serie converge. Si osservi che la serie non converge assolutamente, in quanto

$$\sqrt[k]{2} - 1 = \mathrm{e}^{\log 2/k} - 1 \sim \frac{\log 2}{k}\,, \qquad k \to \infty\,,$$

e quindi la serie dei valori assoluti si comporta come la serie armonica, che diverge.

e) Si osservi che

$$b_k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{k}{2k-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

in quanto

$$\frac{k}{2k-1} < \frac{2}{3}\,, \qquad \forall k \geq 2\,.$$

Pertanto la serie converge assolutamente in quanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge per il Criterio del confronto 1.10 (è maggiorata da una serie geometrica di ragione $q = \frac{2}{3} < 1$).

f) Non converge.

16. *Verifica della convergenza di serie e calcolo della loro somma:*

a) $-1/7$.

b) A meno di un fattore, si tratta di una serie geometrica; ricordando l'Esempio 1.3 iii), si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2 \cdot 4^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{16}} - 1\right) = \frac{3}{26}$$

(si noti che il primo indice della sommatoria è 1).

c) Si tratta di una serie telescopica in quanto possiamo scrivere

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\,;$$

dunque

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}\,,$$

da cui $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

d) $1/2$.