Esercizi

Numeri complessi

October 30, 2014

1. Scrivere in tutte le forme (cartesiana, trigonometrica ed esponenziale) i seguenti numeri complessi: $z = i$, $z = i + 1$, $z = i(1 + i)$

2. Scrivere in tutte le forme i seguenti numeri complessi:

   - $(2 - 3i)(-2 + i)$ $\qquad z = \sqrt{65}[\cos\theta + i\sin\theta],\ \theta = \arctan(-8)$
   - $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$ $\qquad z = \frac{2}{5}e^{i\pi}$
   - $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ $\qquad z = \frac{i}{2}$

3. Trovare modulo e argomento del numero complesso:

   $\frac{1}{1-i} + \frac{2i}{i-1}$ $\qquad \rho = \sqrt{\frac{5}{2}},\ \theta = \arctan -\frac{1}{3}$

4. Risolvere:

   - $(1 + i)^5$ $\qquad 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$
   - $(-i + 1)^2(6 + 2\sqrt{3})^2$ $\qquad 96e^{i\frac{\pi}{6}}$
   - $z^2 = -1 - i$ $\qquad z_1 = 2^{\frac{1}{4}}[\cos(-\frac{3\pi}{8}) + i\sin\frac{3\pi}{8}]$

5. Trovare le radici:

   - $z^2 = -i$ $\qquad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - $z^3 = -8i$ $\qquad z = 2e^{i[\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}]}, k = 0, 1, 2$

6. **NB: Logaritmo**

   $$z\ e\ w\ complessi \quad e^z = w \Rightarrow z = \log w = \ln|x| + i[Arg(w) + 2k\pi]$$

   Trovare modulo, fase e log del numero complesso:

   $z = \frac{e^2}{2} + i\frac{e^2\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \rho = e^2,\ \theta = \frac{\pi}{3},\ \log z = 2 + i[\frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

7. Trovare il log del numero complesso$z = 6 + 2\sqrt{3}i$

   $Soluzione : \log 6 + 2\sqrt{3}i = \ln 4\sqrt{3} + i[\frac{\pi}{6} + 2k\pi]$

8. $w^6 = 64 \qquad w = ?$

   $Soluzioni : w_1 = 2,\ w_2 = \sqrt{3} + i,\ w_3 = -1 + \sqrt{3},\ w_4 = -2,$
   $w_5 = -1 - i\sqrt{3},\ w_6 = 1 - i\sqrt{3}$

9. Risolvere l'equazione: $z^2 - \frac{1}{4}(z - \overline{z})^2 - 4 = 8i$

   $Soluzioni : z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -2 - 2i$

10. Risolvere l'equazione: $(z^6 + 1)(z^3 + i) = 0$

    $Soluzioni : z = e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})},\ z = e^{i(-\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3})}$

11. $e^z = 3\cos\frac{\pi}{10} - 3i\sin\frac{\pi}{10} \qquad z = ?$

    $Soluzione : z = \ln 3 + i[-\frac{\pi}{10} + 2k\pi]$

12. Rappresentare graficamente le soluzioni dell'equazione: $|z^2| - 4|z| = -3$

    $Soluzioni : |z| = 1,\ |z| = 3$