TEOREMI SULLE SUCCESSIONI[1]

1. *Teorema di unicità del limite:* il limite di una successione, se esiste, è unico.
2. *Teorema di limitatezza:* una successione convergente è limitata.
3. *Teorema di esistenza del limite delle successioni monotone:* sia data una successione definitivamente monotona. Se essa è limitata, allora è convergente; se non è limitata, allora è divergente (a $+\infty$ se è crescente, a $-\infty$ se è decrescente).
4. *Primo teorema del confronto:* siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che esistano, finiti o infiniti, i limiti $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n$, allora $l \le m$.
5. *Secondo teorema del confronto – caso finito:* siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n \le c_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.
6. *Secondo teorema del confronto – caso infinito:* siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Se definitivamente vale $a_n \le b_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Analogo risultato vale se il limite è $-\infty$: $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ implica $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
7. *Proprietà:* una successione $\{a_n\}$ è infinitesima, cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, se e solo se la successione $\{|a_n|\}$ dei valori assoluti è infinitesima.
8. *Teorema:* sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\{b_n\}$ una successione limitata. Allora la successione $\{a_n b_n\}$ è infinitesima.
9. *Algebra dei limiti:* siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sue successioni tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ (con l, m finiti o infiniti). Si ha

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = l \pm m$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = l \cdot m$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{l}{m}, \qquad \text{se definitivamente } b_n \neq 0$$

   ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita.

10. *Teorema di sostituzione*: sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e sia g una funzione definita in un intorno di l.
    a) se $l \in \mathbb{R}$ e g è continua in l, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(l)$;
    b) se $l \notin \mathbb{R}$ ed esiste il $\lim_{x\to l} g(x) = m$, allora $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = m$.
11. *Criterio del rapporto*: sia $\{a_n\}$ una successione per cui definitivamente valgo $a_n > 0$. Supponiamo che esista finito o infinito il

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q.$$

    Se $q < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; se $q > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

---

[1] Fonte: *Analisi Matematica II,* C. Canuto A. Tabacco