

## calcolo di limiti di funzioni algebriche che si presentano in forma indeterminata

Le funzioni algebriche sono le funzioni che si presentano sotto forma di polinomi o di radici.

Se il limite delle funzioni algebriche è in forma indeterminata è possibile manipolare algebricamente il polinomio o la radice in modo da sciogliere la forma indeterminata.

Di seguito presentiamo le tecniche di risoluzione più comuni.

forma indeterminata	cosa fare:
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li>mettere in evidenza la <math>x</math> di grado massimo</li> <li>ricalcolare il limite tenendo conto dei segni</li> </ul>
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>mettere in evidenza la <math>x</math> di grado massimo al numeratore</li> <li>mettere in evidenza la <math>x</math> di grado massimo al denominatore</li> <li>semplificare dove è possibile</li> <li>ricalcolare il limite tenendo conto dei segni</li> </ul>
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{0}{0}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>scomporre numeratore e denominatore</li> <li>semplificare</li> <li>ricalcolare il limite tenendo conto dei segni</li> </ul>
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$	<p>ricordando che: <math>(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>moltiplicare e dividere per <math>\sqrt{A} + \sqrt{B}</math></li> <li>sviluppare i calcoli</li> <li>ricalcolare il limite tenendo conto dei segni</li> </ul>
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = +\infty - \infty$	<p>ricordando che:</p> $(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \left[ (\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{AB} + (\sqrt[3]{B})^2 \right] = A - B$ <ul style="list-style-type: none"> <li>moltiplicare e dividere per <math>(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{AB} + (\sqrt[3]{B})^2</math></li> <li>sviluppare i calcoli</li> <li>ricalcolare il limite tenendo conto dei segni</li> </ul>

 <p>per calcolare rapidamente</p> $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li>sostituire <math>+\infty</math> o <math>-\infty</math> alla <math>x</math> di grado massimo e trascurare gli altri termini del polinomio</li> <li>tenere conto dei segni</li> </ul>
 <p>per calcolare rapidamente</p> $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>bisogna considerare il grado del polinomio al numeratore e il grado del polinomio al denominatore</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>se il polinomio al numeratore ha grado maggiore il risultato è <math>\pm\infty</math> tenendo conto dei segni</li> <li>se i gradi sono uguali il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo</li> <li>se il denominatore ha grado maggiore il risultato è zero</li> </ul>

## esempi di calcolo di limiti che si presentano in forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = 2 \cdot (+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 3 = 2 \cdot (+\infty) - (+\infty) + 3 = +\infty - \infty$$

la forma indeterminata  $+\infty - \infty$  si risolve mettendo in evidenza la  $x$  di grado massimo del polinomio, cioè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot \left( 2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3} \right) = \\ &= +\infty \cdot (2 - 0 + 0) = +\infty \cdot 2 = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \frac{(+\infty)+2}{2 \cdot (+\infty)^2 - 5} = \frac{+\infty}{2 \cdot (+\infty) - 5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata  $\frac{+\infty}{+\infty}$  si risolve mettendo in evidenza la  $x$  di grado massimo al numeratore e al denominatore, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left( 1 + \frac{2}{x} \right)}{x^2 \cdot \left( 2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{2}{x} \right)}{x \cdot \left( 2 - \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{1 + \frac{2}{(+\infty)}}{(+\infty) \cdot \left( 2 - \frac{5}{(+\infty)^2} \right)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 2} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  si risolve operando algebricamente sul numeratore e denominatore, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{3 \cdot (+\infty)} - \sqrt{(+\infty)} = \sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty} = +\infty - \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1) - x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \frac{2 \cdot (+\infty) + 1}{\sqrt{3 \cdot (+\infty) + 1} + \sqrt{(+\infty)}} = \frac{+\infty}{+\infty} \end{aligned}$$

la forma indeterminata  $\frac{+\infty}{+\infty}$  si risolve applicando la tecnica vista in precedenza, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left( 2 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x} \cdot \left[ \sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \left( 2 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{\sqrt{+\infty} \cdot \left( 2 + \frac{1}{(+\infty)} \right)}{\sqrt{3 + \frac{1}{(+\infty)}} + 1} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

## altre tecniche risolutive

caso  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{polinomio} = +\infty - \infty$

Nel caso si debba calcolare il limite per  $x$  che tende a infinito di un polinomio, si può applicare la teoria degli infiniti che afferma che il risultato del limite dipende solo dal monomio di grado massimo del polinomio potendosi trascurare i monomi di grado inferiore.

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2 \cdot (+\infty)^3 = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = 2 \cdot (-\infty)^3 = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

caso  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Nel caso si debba calcolare il limite per  $x$  che tende a infinito del rapporto di due polinomi, si possono confrontare i gradi del polinomio a numeratore e del polinomio a denominatore.

Dal confronto si possono avere tre casi possibili

### 1° caso: il polinomio a numeratore ha grado maggiore del polinomio a denominatore

Se il polinomio a numeratore ha grado maggiore il risultato del limite per  $x$  che tende a infinito è  $\pm\infty$ .

Il segno + o - si stabilisce in base alla regola dei segni sostituendo  $+\infty$  (o  $-\infty$ ) al monomio di grado massimo del numeratore. Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 5}{x - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 3x + 2}{2x^2 + 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 5x^3}{x^3 + 2x^2 - 1} = +\infty$$

### 2° caso: il polinomio a numeratore ha lo stesso grado del polinomio a denominatore

Se i polinomi a numeratore e a denominatore hanno lo stesso grado il risultato del limite per  $x$  che tende a infinito è uguale al rapporto dei coefficienti dei monomi di grado massimo

Il segno + o - si stabilisce in base alla regola dei segni sostituendo  $+\infty$  (o  $-\infty$ ) al monomio di grado massimo del numeratore e del denominatore. Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 4} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{4x - 2x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$$

### 3° caso: il polinomio a numeratore ha grado minore del polinomio a denominatore

Se il polinomio a numeratore ha grado minore il risultato del limite per  $x$  che tende a infinito è 0.

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x^4 + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{-2x^2 + 4x + 3} = 0$$