16/02/2017

1) $|z|^2 + 2i\,\mathrm{Re}(\bar{z}-2) + 2(\mathrm{Im}\,z)^4 = 4$

Sol: $z = x+iy$

$$x^2+y^2+2i(x-2)+2y^4 = 4$$

Parti reali e parti immaginarie $\begin{cases} x^2+y^2+2y^4-4=0 \\ 2(x-2)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y^2(1+2y^2)=0 \\ x=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$

$\boxed{z=2}$

2) $z\bar{z} + i(\mathrm{Im}(z)+1) + [\mathrm{Re}(\bar{z}-i)]^4 = 1$

$z = x+iy$ $\quad (z\cdot\bar{z} = |z|^2 = x^2+y^2)$

$$x^2+y^2+i(y+1)+x^4 = 1$$

parti reali e parti immaginarie $\begin{cases} x^2+y^2+x^4-1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ $\quad \boxed{z=-i}$

3) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1-4i}{2i}\right) + (6+3i)z + |\mathrm{Im}(3\bar{z})| = 0$

$\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

$\dfrac{1-4i}{2i} = -\dfrac{1}{2}i - 2$; $z = x+iy$

$$-2+6x-3y+6yi+3xi+|-3y| = 0$$

parti reali e parti immaginarie

$$\begin{cases} -2+6x-3y+3|y|=0 & \longrightarrow \text{2 casi per } |y| \\ 6y+3x=0 & \longrightarrow x=-2y \end{cases}$$

perché siamo nel caso $y \geq 0$

$\therefore\ y \geq 0$ $\begin{cases} -2-12y-3y+3y=0 \\ x=-2y \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\frac{1}{6} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$ impossibile

$\therefore\ y<0$ $\begin{cases} -2-12y-3y-3y=0 \\ x=-2y \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\frac{1}{9} \\ x=+\frac{2}{9} \end{cases}$

$$\boxed{z=+\frac{2}{9}-\frac{i}{9}}$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\operatorname{sen}(x^2)}-1\right)\operatorname{tg}(x^4)}{\cos(x^2)+\log\left(1+\frac{x^4}{2}\right)-1}$$

Stime asintotiche:

numeratore

Per $t \to 0$: $\operatorname{sen}t \sim t$

$e^t-1 \sim t$

$\operatorname{tg}t \sim t$

già fermandosi al primo grado dello sviluppo si arriva a x^4 (e poi x^6)

Quindi $\text{Num} \sim \operatorname{sen}(x^2)\cdot x^4 \sim x^6$

al denominatore serve qualche termine in più che non sia nullo.

denominatore

Per $t \to 0$ $\cos t-1 \sim -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4$

$\log(1+t) \sim t-\frac{1}{2}t^2$

Quindi $\text{Den} \sim \cancel{-\frac{1}{2}x^4}+\frac{1}{24}x^8+\cancel{\frac{1}{2}x^4}-\frac{1}{2}\frac{x^8}{4}=-\frac{1}{12}x^8$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{--}{--} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{-\frac{1}{12}x^8} = \lim_{x\to 0} -\frac{12}{x^2} = \boxed{-\infty}$$

5) $$\lim_{n\to +\infty} \frac{\log^3 n + \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}{n\log^2 n + e^{\frac{1}{n}} + 8^n} \; (=)$$

Osserviamo che $$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]}_{\text{limite notevole}}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e^0 = 1$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Quindi

$$\text{Num} \sim \log^3 n$$
$$\text{Den} \sim 8^n$$

Pertanto

$$(=) \lim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n}{8^n} = \boxed{0}$$

6) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{tg\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n sen\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1} =$$

raccolgo $\frac{1}{n}$ al numeratore, porto la n al denom., la scrivo come $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$ e porto $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sotto l'esponenziale per avere limite notevole (*)

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n sen\frac{1}{n}}{\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1 + e\cdot 0}{1\cdot(+\infty)} = \boxed{0}$$

(*) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{tg(1/n) + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{1}{n}}{e^{1/\sqrt{n}}-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{tg(1/n)}{1/n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{1}{n}\right)}{e^{1/\sqrt{n}}-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{tg(1/n)}{1/n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{1}{n}}{n\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{tg(1/n)}{1/n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{1}{n}}{\frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{1/\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}$$

$n = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n} = \sqrt{n}/(1/\sqrt{n})$

7) Dire se converge e in caso affermativo calcolarlo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x}}$$

Una funzione continua in $[a;b]$ è integrabile in $[a;b]$

$f(x) = 1/\cos^2 x \sqrt{tg x}$ è continua in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ e positiva. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

$\Rightarrow$ f è integrabile in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx}(tg x)$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x}} = \int \frac{1}{\cos^2 x} (tg x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{(tg x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{tg x} + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x}} = \Big[2\sqrt{tg x} \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{2}$$

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

$f(x)$ continua e positiva in $[a, +\infty)$. ~~Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ allora converge~~
Se converge, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ esiste quando $\alpha < 1$ perché: problemi in 0; se $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ continua anche in 0 $\Rightarrow$ l'integrale esiste. Se $\alpha > 0$,
$$\lim_{y \to 0^+} \int_y^1 1/x^\alpha \, dx = \lim_{y \to 0^+} \frac{1 - y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$
Per $\alpha = 1 \Rightarrow \infty$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ esiste quando $\alpha > 1$.

8) $\int_0^{+\infty} x \operatorname{arctg} x \, dx$

$f(x) = x \operatorname{arctg} x$ è continua e positiva in $[0, +\infty)$.

Ma per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim x \cdot \frac{\pi}{2}$ divergente

quindi non è integrabile in $[0, +\infty)$ e l'integrale è uguale a $\boxed{+\infty}$.

spezzo $\int_1^{+\infty}$ in $\int_1^2 + \int_2^{+\infty}$

9) Studiare $\quad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} dx = \int_1^2 \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} dx + \int_2^{+\infty} \dots$

f è continua e positiva in $(1, +\infty)$

Per $x \to 1^+$ $\quad \log x = \log(1 + x - 1) \sim x - 1$

Pertanto $\quad f(x) \sim \frac{x-1}{(x-1)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

e il primo integrale converge.

per avere esponente > 1

Per $x \to +\infty$: $\quad \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}} \sim \frac{\log x}{x^{3/2}} = \frac{\log x}{x^{1/4}} \cdot \frac{1}{x^{5/4}}$

$\left[\frac{\log x}{x^{1/4}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \right.$ e quindi è limitata; $\left. \right]$

$\frac{1}{x^{5/4}} \frac{\log x}{x^{1/4}} \leq \frac{M}{x^{5/4}} = g(x)$; $\quad g$ è integrabile a $+\infty$

Per confronto + confronto asint. anche f lo è.

STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE:

10) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 2)^n}{2n+\frac{3}{2}}$$

CR. RADICE $$\sqrt[n]{\frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}} \longrightarrow \log 2 < 1$$

$$\frac{\sqrt[n]{(\log 2)^n}}{\sqrt[n]{2n+3/2}} = \frac{\log 2}{\sqrt[n]{2n+3/2}} \xrightarrow{+\infty} \frac{\log 2}{\sqrt[n]{2n}} = \frac{\log 2}{1} = \log 2$$

$\Rightarrow$ la serie $\boxed{\text{converge}}$

STUDIARE LA

11) Conv. semplice e assoluta:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n^2+2(-1)^n n}}_{a_n}$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2+2n} & n \text{ pari} \\ \dfrac{1}{n^2-2n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n^2+2(-1)^n n} \right| = \frac{1}{n^2+2(-1)^n n} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la serie conv. ass. e quindi semplic}}$