Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

22/12/2016 - Serie numeriche

Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log(n))^{n/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+a)^n}$. Trovare per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ la somma della serie è 1/3.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n n}$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{n}}$
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, 2^n}$
7. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1/k}}{k!}$
8. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{e^{2k}}$
9. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$
10. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k+k}$
11. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k+1}\right)$
12. $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{k^2}\right)$

1) Criterio di Leibniz:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$, ok

$\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n\geq 0}$ non-crescente, ovviamente vero.

Verifica di non-crescenza:

$b_{n+1} \leq b_n \to \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \Rightarrow n! \leq (n+1)!$, vero per tutti gli n

Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz, essendo verificate tutte le ipotesi.

2) CRITERIO DELLA RADICE

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(log(n))^{n/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(log(n))^{1/2}} = 0 < 1 \Longrightarrow$ La serie converge

3) Si tratta di una serie geometrica, quindi (ricordandone la definizione) imponiamo:

Serie convergente per $-1 < \frac{1}{1+a} < 1 \Longrightarrow a < -2 \vee a > 0$

Serie divergente per $\frac{1}{1+a} \geq 1 \Longrightarrow -1 < a \leq 0$

Serie indeterminata per $\frac{1}{1+a} \leq -1 \Longrightarrow -2 \leq a < -1$

ATTENZIONE ADESSO! L'esercizio vuole a affinchè la somma faccia 1/3! Ma quella serie geometrica non parte da 0! Dobbiamo imporre:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+a)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+a)^n} - \frac{1}{(1+a)^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+a}} - 1 = \frac{1}{3}$$

Risolvendo l'equazione di destra viene a=3.

N.B Si deve controllare se a=3 è un valore che rende la serie effettivamente convergente, e siccome è così,

la soluzione è accettabile.

4) CRITERIO DELLA RADICE (quello del rapporto è facile lo stesso)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5^n n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5} < 1 \Longrightarrow$ La serie converge

5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(n\pi+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(n\pi)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Usiamo il criterio di Leibniz:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, ok

$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\geq 1}$ $non-crescente$, ok$\Longrightarrow$La serie converge

6) CRITERIO DEL RAPPORTO(quello della radice è facile lo stesso)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}2^{n+1}} \cdot \sqrt{n}2^n = \frac{1}{2} < 1$converge

7)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1/k}}{k!}$$ serie a term. pos.

limite notevole delle successioni: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

La succ. $k^{1/k}$ converge a 1 per $k \to +\infty$, quindi è limitata. Precisamente:

$$0 < k^{1/k} \leq C \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k^{1/k}}{k!} \leq \frac{C}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Siccome la serie con term. gen. $b_k = \frac{C}{k!}$ converge, per il cr. del confr. converge anche quella data.

8)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{e^{2k}}$$ $(e \approx 2{,}718) \Rightarrow (e^2 \approx 7{,}389)$

Serie geom. con $q = \frac{2}{e^2} \in (0,1)$ $\Rightarrow$ converge

9)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$$

serie a term. pos. $\frac{3k^2+1}{k^4+1} \sim \frac{3}{k^2}$ ← serie arm. generalizzata convergente

$\Rightarrow$ per il confronto asintotico converge anche la serie data

10) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k + k}$

$\dfrac{1}{3^k+k} \sim \dfrac{1}{3^k}$ ← serie geom. con $q = \frac{1}{3}$ ⇒ converge

11) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k+1}\right)$

serie armonica generalizzata

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge $\forall \alpha \in]0;1[$

Stima asintotica: $\sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \sim \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \sim \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k^2}$ converge

12) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\text{serie armonica generalizzata}}$ per $k \to +\infty$ ⇒ converge.