# Tutorato Analisi 1

## Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

### 16/12/2016 - Polinomi di MacLaurin e Serie numeriche

1. Calcolare i seguenti limiti utilizzando i polinomi di MacLaurin:
   (a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-e^{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x\sin x}$
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin(3x)}$
   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)}$
   (d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$
   (e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{3}{\log x}\right)$
   (f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^4}$
   (g) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-2\cos x+1}{x^2\log\left(1+3x^2\right)}$

2. Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$
   (b) $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$
   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2}{1+4^n}$

1)

a. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-e^{x^2}\right)\frac{1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}-e^{x^2}}{x\sin x} =$$

$$\operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)$$

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$$

- $$\frac{\operatorname{sen}x}{x}-e^{x^2}=\cancel{1}-\frac{x^2}{6}-\cancel{1}-x^2+o(x^2) = -\frac{7}{6}x^2+o(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}x}{x}-e^{x^2}\sim -\frac{7}{6}x^2 \quad \text{per } x\to 0$$

- $$x\operatorname{sen}x = x^2+o(x^2) \quad\Longrightarrow\quad x\operatorname{sen}x\sim x^2$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{6}x^2}{x^2}=\boxed{-\frac{7}{6}}$$

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\operatorname{sen}(3x)} =$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

- $$e^x-1+\log(1-x)=\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{6}-\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$
$$=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

- $$x^2\operatorname{sen}(3x)=3x^3+o(x^3)$$

$$\circled{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{3x^3} = \boxed{-\frac{1}{18}}$$

c. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x}{\sqrt[3]{x^2}\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)} =$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) = 1+\frac{1}{3}x + o(x)$$

basta arrivare a x

$$e^x = 1+x+o(x)$$

- $\sqrt[3]{1+x} - e^x = \cancel{1}+\frac{1}{3}x - \cancel{1} - x + o(x) = -\frac{2}{3}x + o(x)$

$$e^{\sqrt[3]{x}} - 1 \sim \sqrt[3]{x}$$

- $\sqrt[3]{x^2}\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right) \sim \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x} = x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x}{x} = -\frac{2}{3}$$

d. $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}\right)$$

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)=$$

$$=\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}-1\right)\sim\frac{2}{3}\sqrt[3]{x-1}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^{2/3}}$$

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{x-1}\quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

e. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{3}{\log x}\right)$$

$$t=x-1 \leadsto x=t+1$$

$$\lim_{t\to0}\frac{t+3}{t}-\frac{3}{\log(t+1)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[(t+3)-\frac{3t}{\log(1+t)}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(t+3)\log(1+t)-3t}{t\log(1+t)}=$$

$$(t+3)\log(1+t)-3t=(t+3)\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-3t=$$

$$=t^2+\cancel{3t}\underbrace{}_{}-\frac{3}{2}t^2+o(t^2)\cancel{-3t}=-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$$

$$t\log(1+t)\sim t^2 \quad \text{per } t\to0$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2}=-\frac{1}{2}$$

f.

Sviluppiamo il numeratore al quarto ordine; tenendo conto degli sviluppi

$$e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2=\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{3}{2}x^2=\frac{11}{24}x^4+o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{11}{24}$$

g.

Ragioniamo sul denominatore: in generale lo sviluppo di $\log(1+x)$ è $x$, quindi in questo caso rimane $3x^2$ , che moltiplica $x^2$. Il grado minimo è 4 e perciò sviluppiamo il numeratore fino al quarto grado: $e^{-x^2}\to 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ e $\cos x\to 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

Otteniamo quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-2\cos x+1}{x^2\log\left(1+3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+\frac{x^4}{2}-2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+1}{x^2\cdot 3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2+\frac{x^4}{2}-2+x^2-\frac{x^4}{12}+1}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{12}}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)}{3x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6-1}{12}}{3}=\frac{5}{36}$$

2.a)

Criterio della radice: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ne^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{e^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}1\cdot e^{-n}=0<1\to$ convergente

2.b)

$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ è serie armonica generalizzata, considerando $\sqrt{n}=n^{1/2}$ . Ricordando il comportamento generale della serie armonica generalizzata, possiamo concludere che la serie diverge, essendo 1/2 compreso tra 0 e 1 (intervallo di divergenza)

2.c)

Criterio del confronto asintotico: $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^2}$ che è ancora una serie armonica generalizzata.

Questa volta l'esponente di $n$ è 2, non compreso nell'intervallo di divergenza. Pertanto la serie armonica generalizzata converge e, per il criterio del confronto asintotico, converge anche la serie del nostro esercizio.

2.d)

Criterio del rapporto: $$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{1+4^{n+1}}\frac{1+4^n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{2n^2}\frac{1+4^n}{1+4\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{(n+1)^2}{n^2}}\boxed{\frac{4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+4\right)}}=\frac{1}{4}$$

Grado numeratore = 2
Grado denominatore = 2
Quindi faccio rapporto dei
coefficienti di grado massimo = 1

I $4^n$ si semplificano e,
sostituendo n, $1/(4^n)=0$.
Rimane quindi 1/4

1/4 è minore di 1 per cui la serie di partenza è convergente.