Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

15/12/2016 - Derivate e Studi di funzione

1. Calcolare le seguenti derivate:
   (a) $y=\sqrt{\cos\left(e^{x}\right)}$
   (b) $y=\ln\left(\left(6x-2x^{2}\right)^{2}\right)$
   (c) $y=\arcsin\left(2x^{3}+3\right)$
   (d) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$
   (e) $y=\sin\left[\sin\left(x^{2}+2x+1\right)\right]$

2. Studiare le seguenti funzioni:
   (a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^{2}-3}}{x+1}$
   (b) $f(x)=1-e^{-|x|}+\dfrac{x}{e}$

1.a)
Deriviamo nell'ordine: radice, coseno ed esponenziale:

$$y=\sqrt{\cos\left(e^{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\cos\left(e^{x}\right)}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\cos\left(e^{x}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{\cos\left(e^{x}\right)}}\cdot\left(-\sin(e^{x})\right)\cdot\frac{d}{dx}e^{x}=-\frac{e^{x}\cdot\sin\left(e^{x}\right)}{2\sqrt{\cos\left(e^{x}\right)}}$$

1.b)
In questo caso, partiamo dal logaritmo, poi la potenza di 2 e infine la differenza:

$$y=\ln\left(\left(6x-2x^{2}\right)^{2}\right)\rightarrow y'=\frac{1}{\left(6x-2x^{2}\right)^{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\left(6x-2x^{2}\right)^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\left(6x-2x^{2}\right)^{2}}\cdot 2(6x-2x^{2})\cdot\frac{d}{dx}\left[6x-2x^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\left(6x-2x^{2}\right)^{2}}\cdot 2(6x-2x^{2})\cdot(6-4x)=\frac{2(6-4x)}{6x-2x^{2}}=\frac{6-4x}{3x-x^{2}}$$

1.c)
Procediamo partendo dall'arcoseno e andando a concludere con l'argomento. Ricordiamo che la derivata dell'arcoseno di x è: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Quindi:

$$y=\arcsin(2x^3+3) \rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(2x^3+3\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^3+3\right)=\frac{6x^2}{\sqrt{1-\left(2x^3+3\right)^2}}$$

1.d)
Derivata del logaritmo moltiplicata per la derivata dell'argomento:

$$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \rightarrow y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{d}{dx}(1+x^2)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1.e)
Derivata del seno più esterno moltiplicata per la derivata di quello più interno e per quella dell'argomento:

$$y=\sin\left[\sin\left(x^2+2x+1\right)\right] \rightarrow y'=\cos\left[\sin\left(x^2+2x+1\right)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\sin\left(x^2+2x+1\right)\right]=$$

$$=\cos\left[\sin\left(x^2+2x+1\right)\right]\cdot\cos\left(x^2+2x+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+2x+1\right)=$$

$$=\cos\left[\sin\left(x^2+2x+1\right)\right]\cdot\cos\left(x^2+2x+1\right)\cdot(2x+2)$$

2.a)

Studio della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+1}$*:*

a) Il dominio è determinato dalle condizioni $x^2 - 3 \geq 0$ e $x \neq -1$, e dunque $\operatorname{dom} f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$.
Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1\,,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = 0,$$

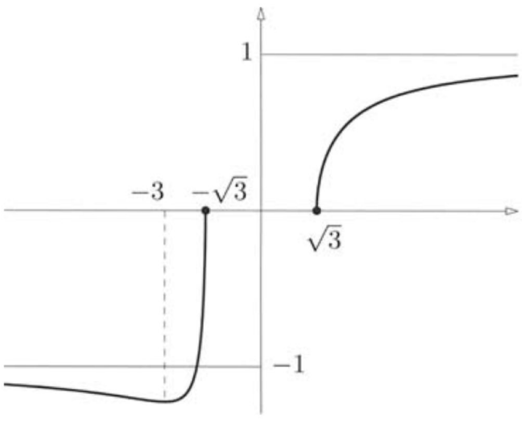
quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale destro e $y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro.

b) Risulta

$$f'(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2\sqrt{x^2-3}},$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = -3$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Pertanto f è crescente in $[-3, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$, decrescente in $(-\infty, -3]$; in punto $x = -3$ è un punto di minimo assoluto con $f(-3) = -\frac{\sqrt{6}}{2} < -1$. Inoltre, i punti $x = \pm\sqrt{3}$ sono anch'essi punti di estremo, più precisamente $x = -\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $x = \sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo con $f(\pm\sqrt{3}) = 0$.

c) Il grafico della funzione f è mostrato nella Figura



2.b)

Studio della funzione $f(x) = 1 - e^{-|x|} + \frac{x}{e}$:

a) Chiaramente $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Osservando che

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-|x|} = 0\,,$$

otteniamo immediatamente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-|x|}}{x} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\,,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{x}{e}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(1 - e^{-|x|}) = 1$$

e quindi la retta $y = \frac{1}{e}x + 1$ è asintoto obliquo completo.

b) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ e non vi sono problemi di derivabilità per $x \neq 0$. Risulta

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} + \dfrac{1}{e} & \text{se } x > 0\,, \\ -e^{x} + \dfrac{1}{e} & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-e^{x} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1$$
$$\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + 1$$

e quindi f non è derivabile in $x = 0$.
Inoltre, per $x > 0$, $f'(x) > 0$. Per $x < 0$, $f'(x) > 0$ se $e^x < \frac{1}{e}$ ossia se $x < -1$.
In conclusione f è crescente su $(-\infty, -1]$ e su $[0, +\infty)$, decrescente su $[-1, 0]$.

c) Per quanto appena visto possiamo affermare che $x = -1$ è un punto di massimo locale con $f(-1) = 1 - \frac{2}{e}$, mentre $x = 0$ è un punto di minimo locale con $f(0) = 0$.