Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

01/12/2016 - Derivate

1. Trovare dove sono derogabili le seguenti funzioni e calcolare la derivata:
   a) $f(x) = x\sqrt{|x|}$
   b) $f(x) = \cos|x|$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa data:
   a) $f(x) = \log(3x-2)$, $x_0 = 2$
   b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = \frac{1}{\pi}$

3. Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:
   a) $f(x) = 3x\sqrt[3]{1+x^2}$
   b) $f(x) = \log|\sin x|$
   c) $f(x) = \cos\left(e^{x^2+1}\right)$
   d) $f(x) = (x + \arctan x)^x$

4. Sia $y = g(x)$ l'equazione della retta tangente alla curva $y = e^{4(x+1)} + 4x^2 - \arctan(4x+4)$ nel punto $(-1,\ 5)$. Calcolare $g(1)$.

1.a)

f è derivabile in ogni $x \neq 0$ in quanto composizione e prodotto di funz. derivabili. La derivabilità in 0 va studiata tramite la definizione:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow \exists\ f'(0)=0$

Se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \sqrt{|x|} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \frac{x}{|x|} =$

$$= \frac{2|x|\ |x| + x^2}{2|x|\ \sqrt{|x|}} \underset{\boxed{x^2=|x|^2}}{=} \frac{3|x|}{2\sqrt{|x|}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$$

1.b)

f è derivabile in $x \neq 0$ (come in a))

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos|x| - 1}{x} \sim \frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x} = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{x} = -\frac{1}{2}x$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

pertanto $\exists\ f'(0)=0$

Se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \left(-\sin|x|\right)\frac{x}{|x|} = \begin{cases} -\sin x & x>0 \\ -\sin(-x)\,(-1) & x<0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -\sin x & x>0 \\ -\sin x & x<0 \end{cases} = -\sin x$$

2.a)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L' eq. della retta tangente è} \\ y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\end{array}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x-2} \cdot 3 \quad ; \quad f'(2) = \frac{3}{4}$$

$$y = \log 4 + \frac{3}{4}(x-2)$$

2.b)

$$f'(x) = \left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad ; \quad f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -1\left(-\pi^2\right) = \pi^2$$

$$y = \pi^2\left(x - \frac{1}{\pi}\right)$$

3.a)

$$\frac{d}{dx}\left(3x\sqrt[3]{1+x^2}\right) = 3\sqrt[3]{1+x^2} + \cancel{3}x \cdot \frac{1}{\cancel{3}}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$$= 3\sqrt[3]{1+x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{3(1+x^2)+2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{5x^2+3}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

3.b)

Ricordando che $\quad \dfrac{d}{dx}|f(x)| = \dfrac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\log|\sin x|\right) = \frac{1}{|\sin x|} \; \frac{\sin x}{|\sin x|} \; \cos x = \frac{\sin x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \operatorname{cotg} x$$

3.c)

$$\frac{d}{dx}\cos\left(e^{x^2+1}\right) = -\sin\left(e^{x^2+1}\right)\cdot e^{x^2+1}\cdot 2x = -2xe^{x^2+1}\sin\left(e^{x^2+1}\right)$$

3.d)

$$(x+\operatorname{arctg}x)^x = e^{x\log(x+\operatorname{arctg}x)}$$

$$\frac{d}{dx}(x+\operatorname{arctg}x)^x = \frac{d}{dx}e^{x\log(x+\operatorname{arctg}x)} =$$

$$= e^{x\log(x+\operatorname{arctg}x)}\left\{\log(x+\operatorname{arctg}x) + \frac{x}{x+\operatorname{arctg}x}\cdot\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)\right\}$$

$$= (x+\operatorname{arctg}x)^x\left\{\log(x+\operatorname{arctg}x) + \frac{x(2+x^2)}{(1+x^2)(x+\operatorname{arctg}x)}\right\}$$

4)
Ricordiamo che la retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 ha equazione: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Calcoliamo quindi la derivata e sostituiamo in essa il valore di x_0 :

$$f'(x) = e^{4(x+1)}\cdot 4 + 8x - \frac{4}{1+(4x+4)^3}$$

$$f'(x_0) = 4 - 8 - 4 = -8$$

La retta tangente è quindi: $y = -8(x+1)+5 \rightarrow y = -8x-3$ ed è proprio la $g(x)$. Si calcola immediatamente che $g(1) = -8-3 \rightarrow g(1) = -11$.