Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

24/11/2016 - Limiti di funzione

Calcolare i seguenti limiti di funzione:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$
4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x}$
5. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x}$
6. $\lim_{x\to +\infty} e^{1/x}\cos\frac{1}{x}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{8x}{3\sin x-x}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin x}$
9. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1}$
10. $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\tan x^3}{\sin^2 x}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\tan 2x}$
12. $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sqrt{1+(1-x)}-1}$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x-2x\cos^2 x}{3x\cos x-5\sin x}$

1)

Se sostituiamo 0 alla x, otteniamo $\frac{4}{0}$ e ha un valore diverso a seconda che al denominatore ci sia 0^+ o 0^-. Studiamo separatamente limite destro e limite sinistro:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Limite destro e limite sinistro esistono ma sono diversi, per cui in conclusione il limite non esiste. (Esistono separatamente il limite destro e il limite sinistro, ma il limite in entrambe le direzioni non esiste)

2)
Si tratta dello stesso limite dell'esercizion 1) ma la x tende a un valore diverso. Non conviene ragionare sul grado del numeratore e su quello del denominatore perché la x non tende a 0 e potremmo giungere a conclusioni sbagliate. Per questo motivo lavoriamo algebricamente sul numeratore e sul denominatore: al numeratore riconosciamo il quadrato di un binomio e al denominatore possiamo raccogliere una x.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^3+5x^2-14x}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x^2+5x-14)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x\cdot(x+7)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x\cdot(x+7)}$$

scompongo il denominatore (mi servono due numeri che sommati diano 5 e moltiplicati diano -14: tali due numeri sono 7 e -2)

Adesso provando a sostituire otteniamo: $\frac{0}{2\cdot(2+7)}=0$ (non è una forma indeterminata per cui il risultato è accettabile).

3)
Se sostituiamo, otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Come solitamente facciamo per eliminare una radice, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1+\sqrt{x}$ e svolgiamo un po' di calcoli:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

4)
Il limite è per x che va a +infinito: possiamo ragionare sul grado del numeratore e del denominatore. Il numeratore ha grado massimo 1 come anche il denominatore, quindi il limite è dato dal rapporto dei coefficienti della x, ovvero 1.

5)
Stesso ragionamento dell'esercizio 4): il grado massimo al numeratore è uguale al grado massimo del denominatore ed è pari a 2/3. Il rapporto dei coefficienti ci dice che il risultato del limite è 1.

6)
Quando siamo di fronte a un limite conviene "perdere" sempre 10 secondi e sostituire il valore a cui tende la x per verificare se è una forma indeterminata e se sì quale. In questo caso non otteniamo una forma indeterminata, per cui il limite viene immediatamente risolto:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}\cos\frac{1}{x}=e^{1/\infty}\cos\frac{1}{\infty}=e^0\cos0=1\cdot1=1\ .$$

7)
E' un limite per la x che va a 0, quindi potrei sfruttare la stima asintotica: $\sin x \sim x$. Sostituendo abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{3\sin x - x} \sim \lim_{x\to 0}\frac{8x}{3x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{2x} = 4 \ .$$

Arriveremmo allo stesso risultato se al posto della stima asintotica usassimo il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Infatti raccogliendo una x al denominatore abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{3\sin x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{x\left(3\cdot\frac{\sin x}{x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{8}{3\cdot\frac{\sin x}{x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{8}{3-1} = \lim_{x\to 0}\frac{8}{2} = 4 .$$

8)
Anche in questo caso abbiamo la doppia opzione: o stime asintotiche ($\cos x \sim 1$ e $\sin x \sim x$) oppure i limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Se sostituiamo le stime asintotiche però otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui l'unica strada percorribile è quella dei limiti notevoli.
Raccogliamo un '-' al numeratore e dividiamo numeratore e denominatore per 2x (i limiti notevoli sono poi evidenziati in rosso e in verde):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos 2x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\frac{1-\cos 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{2x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{0}{\frac{1}{2}}\right) = 0 .$$

9)
Consideriamo il rapporto come prodotto tra due funzioni:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{5+\cos x}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

La prima è limitata mentre la seconda è infinitesima, per cui possiamo usare il teorema che ci dice che il risultato del limite è 0.

10)
Sostituiamo alla tangente il rapporto tra seno e coseno, applichiamo le stime asintotiche, raccogliamo poi x^2 e infine sostituiamo 0 alla x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\tan x^3}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\frac{\sin x^3}{\cos x^3}}{(\sin x)^2} \sim \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\frac{x^3}{1}}{(x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+x)}{x^2} = 2+0 = 2$$

11)
Sostituiamo ancora alla tangente il rapporto tra seno e coseno, applichiamo le stime asintotiche e poi riconosciamo il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}\sim\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\frac{2x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

12)
Raccogliamo una *e* al numeratore e applichiamo il cambio di variabile t=x-1. Dobbiamo ragionare sul nuovo limite: per la x che tende a 1, ora la x tende a 0:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x}-e}{\sqrt{1+(1-x)}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e\left(\frac{e^{x}}{e}-1\right)}{\sqrt{1+(1-x)}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{\sqrt{1+(1-x)}-1}\to\lim_{t\to 0}\frac{e(e^{t}-1)}{\sqrt{1-t}-1}$$

Pensiamo ai limiti notevoli $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$. In questo caso, per applicare il primo limite manca una t al denominatore, mentre per applicare il secondo limite (in cui $\alpha=\frac{1}{2}$), abbiamo il numeratore del limite notevole che qui è al denominatore (quindi è il reciproco), per cui abbiamo bisogno -t al numeratore del nostro rapporto (ho bisogno -t perché nel limite notevole se ho +x dentro la parentesi devo avere +x al denominatore e se ho -x al numeratore del limite notevole devo avere -x anche al denominatore). Moltiplico e divido per -t:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e(e^{t}-1)}{\sqrt{1-t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e(e^{t}-1)}{(1-t)^{1/2}-1}\cdot\frac{-t}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{e(e^{t}-1)}{-t}\cdot\frac{-t}{(1-t)^{1/2}-1}=\lim_{t\to 0}-e\cdot\frac{(e^{t}-1)}{t}\cdot\frac{-t}{(1-t)^{1/2}-1}=-e\cdot 1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2e$$

13)
Applichiamo le stime asintotiche e svolgiamo i calcoli per ottenere il risultato:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x-2x\cos^{2}x}{3x\cos x-5\sin x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{4x-2x\cdot 1}{3x\cdot 1-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-2x}{3x-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-2x}=-1$$