Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

10/11/2016 - Limiti di successione e limiti di funzione

1. Calcolare i seguenti limiti di successione:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$

   (c) $\lim_{n\to+\infty} n \cdot 2^{-n}$

   (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^n+2}$

   (e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^3 n + \sqrt[3]{n}}{n-n^2}$

   (f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)}$

   (g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3-1)}{\log(3n^4-6)}$

   (h) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$

---

2. Calcolare i seguenti limiti di funzione:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-5^x}{1-3^x}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\tan x \cdot \sin(2x)}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \left(1-\frac{2}{7}x\right)^{1/x}$

   (f) $\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x-2}-1}{1-\cos(x-2)}$

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+2)}{\log(x+1)}$

1.a)

Ragioniamo su $(-1)^n$: è una successione che assume solamente due valori: +1 se n è pari, -1 se n è dispari. Quindi è oscillante e inoltre limitata, proprio perché assume sempre gli stessi due valori. Abbiamo a disposizione un teorema: il prodotto tra una successione infinitesima e una successione limitata va a 0. Scriviamo meglio la nostra successione:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Si vede che la successione nella prima parentesi quadrata è pure limitata come $(-1)^n$ perché è semplicemente una sua traslazione verticale. La successione nella seconda parentesi quadrata è infinitesima. Sono soddisfatte quindi tutte le ipotesi del teorema: concludiamo che il limite richiesto è 0.

1.b)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$. Ricordiamo il limite notevole $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e, attraverso l'algebra dei limiti, lo applichiamo al denominatore. Il limite richiesto è pertanto 3.

1.c)

$\lim_{n\to+\infty} n\cdot 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, perché 2^n è infinito di ordine superiore a n .

1.d)

Applicando la gerarchia degli infiniti: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n}$. L'ordine di infinito del denominatore è maggiore di quello del denominatore, pertanto il limite richiesto è 0.

1.e)

Ragionando di nuovo sull'ordine degli infiniti, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^3 n + \sqrt[3]{n}}{n-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{-n^2}$. Il grado maggiore è al denominatore (numeratore ha grado 1/3 mentre denominatore ha grado 2), quindi il limite richiesto è 0.

1.f)

Potremmo concludere immediatamente che il limite è 1, in quanto asintoticamente sia il numeratore sia il denominatore si comportano come $\log n$, quindi da rapporto dei coefficienti si ottiene proprio 1.

Proviamo comunque a svolgere qualche calcolo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left[n(1+\frac{1}{n})\right]}{\log\left[n(1-\frac{1}{n})\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n} = 1$$

perché $\log\left(1\pm\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

1.g)
Raccogliamo il grado massimo all'interno dei logaritmi e applichiamo la proprietà per cui il logaritmo di un prodotto è la somma dei logaritmi:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n^3-1)}{\log(3n^4-6)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\log\left(3n^4\left(1-\frac{2}{n^4}\right)\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3+\log\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\log 3n^4+\log\left(1-\frac{2}{n^4}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3+\log\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\log 3+\log n^4+\log\left(1-\frac{2}{n^4}\right)}$$

A questo punto vediamo che: $\log\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\xrightarrow{n\to+\infty}0$, $\log\left(1-\frac{2}{n^4}\right)\xrightarrow{n\to+\infty}0$ e $\log 3$ è una costante, per cui a $+\infty$ non la consideriamo.
I termini che rimangono sono pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n^3}{\log n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\log n}{4\log n}=\frac{3}{4}$$

1.h)
Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$$

Raccolgo una n al numeratore e una n^2 nelle due radici al denominatore:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\xrightarrow{\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

2.a)
È richiesto il calcolo del limite di un rapporto di polinomi: è il caso in cui si ragiona con l'algebra degli infiniti, e in particolare con il grado dei polinomi. Vediamo che è un limite per la x tendente a 0, quindi quello che "comanda" è il grado minimo (nell'esercizio *3)* comanderà invece il grado massimo perché la x tenderà a infinito). Vediamo che il grado minimo è 1, cioè abbiamo la x sia al numeratore sia al denominatore: la regola dice che, se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, il limite è il rapporto dei coefficienti di tale grado. In questo caso quindi il risultato è 4/(-1) cioè -4 .

Se avessimo avuto ad esempio $\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x^2+4x+2}{x^5-x}$, provando a sostituire lo 0 vediamo che la forma non è più indeterminata ma è semplicemente 2/0, che dà come risultato infinito (più o meno, a seconda che la x tenda a 0 da destra o da sinistra).

2.b)
Con lo stesso ragionamento iniziale dell'esercizio *2)*, ora qui "comanda" il grado massimo: vediamo che il numeratore ha grado 3, mentre il denominatore ha grado 5. Quindi siamo nel caso in cui il denominatore ha grado maggiore, cioè va a infinito più rapidamente rispetto al numeratore. Il limite richiesto è quindi 0 .

2.c)
L'idea che dovrebbe sorgere è quella di provare ad usare il limite notevole del primo esercizio, cioè $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$ (al numeratore *a* sarebbe 5 mentre al denominatore sarebbe *3*). Se intraprendiamo questa strada, vediamo che manca una x per applicare il limite notevole: moltiplico e divido allora per x: $\lim_{x\to 0}\frac{1-5^x}{1-3^x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-5^x\right)\cdot\frac{1}{1-3^x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-5^x}{x}\cdot\frac{x}{1-3^x}\right]$. Ora procediamo utilizzando l'algebra dei limiti, secondo la quale il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, e aggiustiamo un po' di segni "raccogliendo i - " dove necessario:

lo devo pensare come il reciproco

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-5^x}{x}\cdot\frac{x}{1-3^x}\right]=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-5^x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-3^x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-5^x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-3^x}{x}}\right)=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left(-\frac{5^x-1}{x}\right)\right)\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{3^x-1}{x}\right)}=\log 5\cdot\frac{1}{\log 3}=\frac{\log 5}{\log 3}=\boxed{\log_3 5}$$

regola del cambiamento di base dei logaritmi

2.d)
Al denominatore sostituiamo la tangente con il rapporto e usiamo la formula di duplicazione; al numeratore notiamo invece che possiamo applicare la relazione fondamentale della goniometria: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$. Facendo tali sostituzioni e qualche semplificazione si ottiene in definitiva:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\tan x\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot 2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2.e)
Il limite notevole a cui vogliamo arrivare è $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Qui abbiamo un -2/7 all'interno della parentesi e manca all'esponente per poter applicare il limite: "lo aggiungiamo e lo togliamo":

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{7}x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(-\frac{2}{7}x\right)\right)^{\frac{1}{x\left(-\frac{2}{7}\right)}\left(-\frac{2}{7}\right)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\left(1+\left(-\frac{2}{7}x\right)\right)^{\frac{1}{-\frac{2}{7}x}}\right]}_{\text{limite notevole } = e}{}^{-\frac{2}{7}}=e^{-\frac{2}{7}}\ .$$

2.f)
Il limite è per x tendente a 2, cioè a un valore diverso da 0 e infinito (che sono gli unici due valori che mi permettono di utilizzare gli strumenti a disposizione, ovvero i limiti notevoli e le stime asintotiche). Applichiamo pertanto un cambio di variabile:

t = x - 2, ottenendo un limite per t tendente a 0 (perché, quando la x tende a 2, la t tende a 0):

$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{x-2}-1}{1-\cos(x-2)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{e^t-1}{1-\cos t}$. Ora, se moltiplichiamo e dividiamo adeguatamente per t, possiamo applicare due limiti notevoli: $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ e $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$. Vediamo infatti che:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{e^t-1}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0^-} \left(\frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{t}{1-\cos t} \right) = \left(\lim_{t\to 0^-} \frac{e^t-1}{t} \right) \cdot \left(\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{\frac{1-\cos t}{t}} \right) = 1 \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty \quad .$$

2.g)

Ragioniamo un po' come nell'esercizio 1.g) raccogliendo la x all'interno dei logaritmi e applicando la proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+2)}{\log(x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)}{\log\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x + \log\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\log x} = 1$$