# Tutorato Analisi 1

## Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

### 03/11/2016 - Grafici di funzioni e limiti di successione

1. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
    (a) $f(x) = \sin|x|$
    (b) $f(x) = |\cos(x)|$
    (c) $f(x) = e^{|x-1|}$
    (d) $f(x) = ||x-1|-1|$

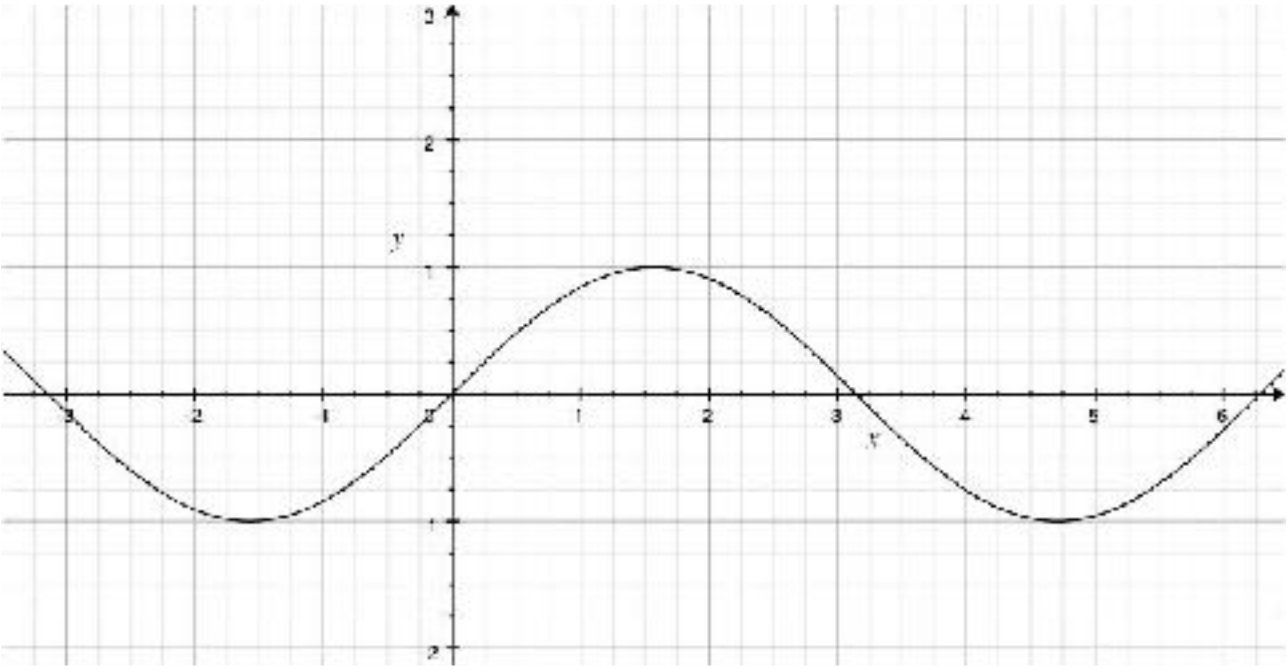
---

2. Calcolare i seguenti limiti di successione:
    (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4 + e^{-n}}{5\log n + n^3}$
    (b) $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2+5n}{7+3n}\right]$
    (c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin n}{n^3+n^2+1}$
    (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n\sin n}{1+n^2+n}$
    (e) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^n$
    (f) $\lim_{n\to+\infty} n^2 2^{\frac{1}{n}}$
    (g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{n+(-1)^n}$

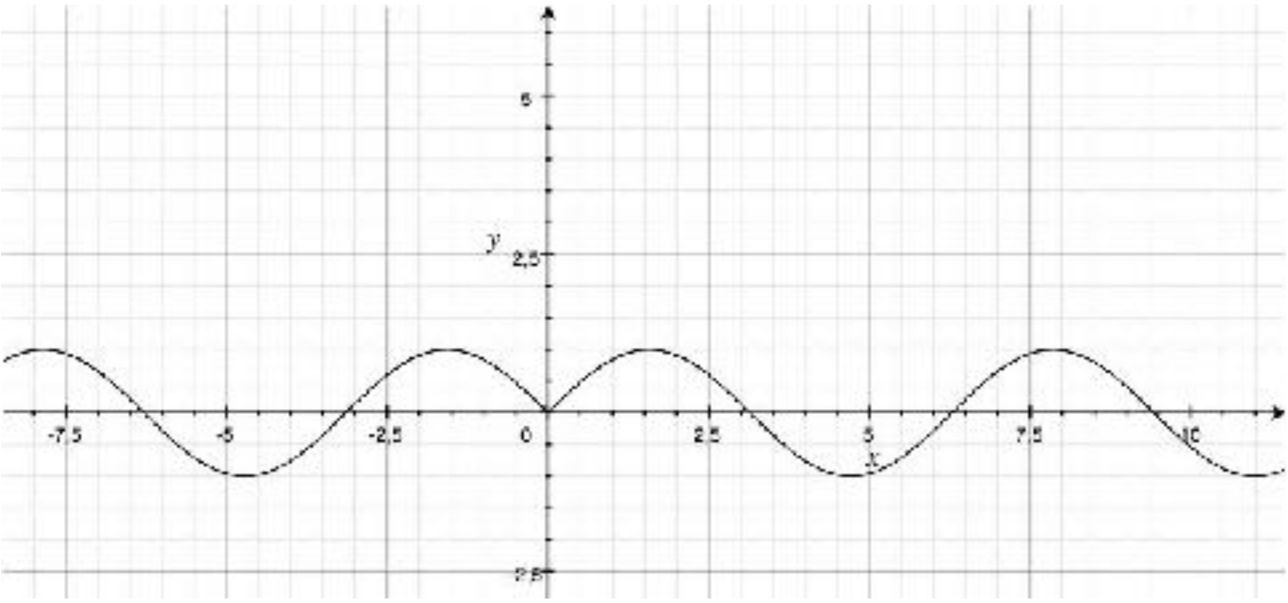
1.a)

I passaggi sono: $\sin x \rightarrow \sin|x|$

Il grafico di sin*x* è il seguente



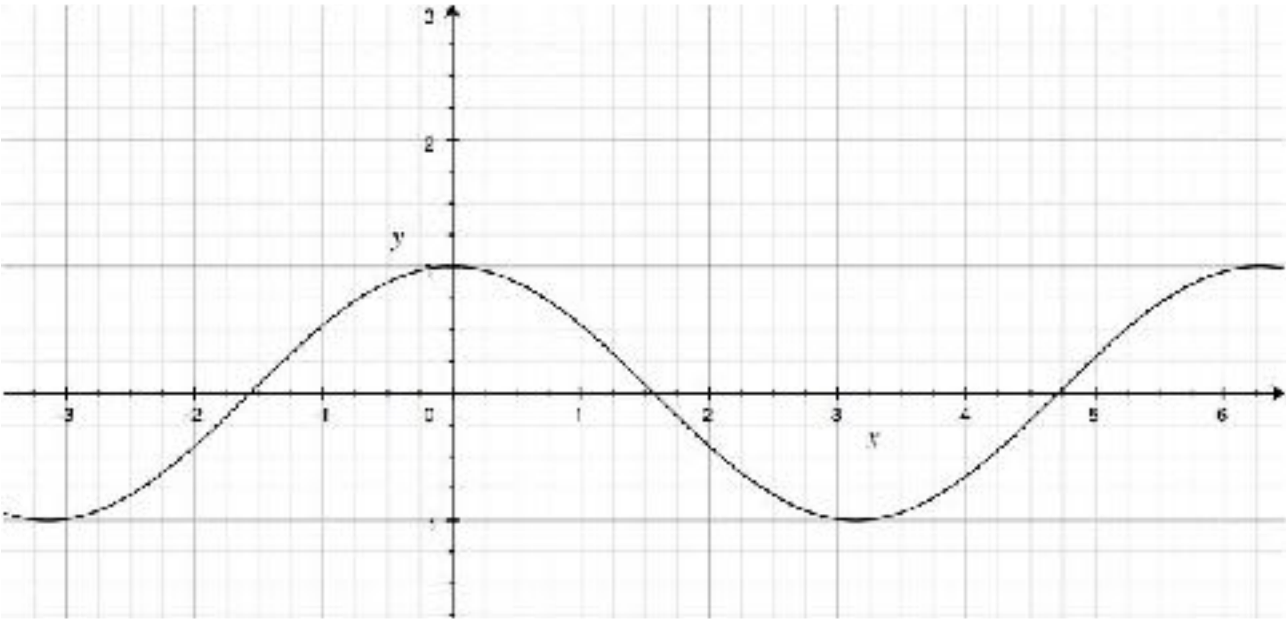
Per ottenere il nostro risultato, bisogna ignorare la parte di grafico con le x negative e ribaltare attorno all'asse verticale la parte di grafico con le x positive. Il grafico finale è quindi il seguente:



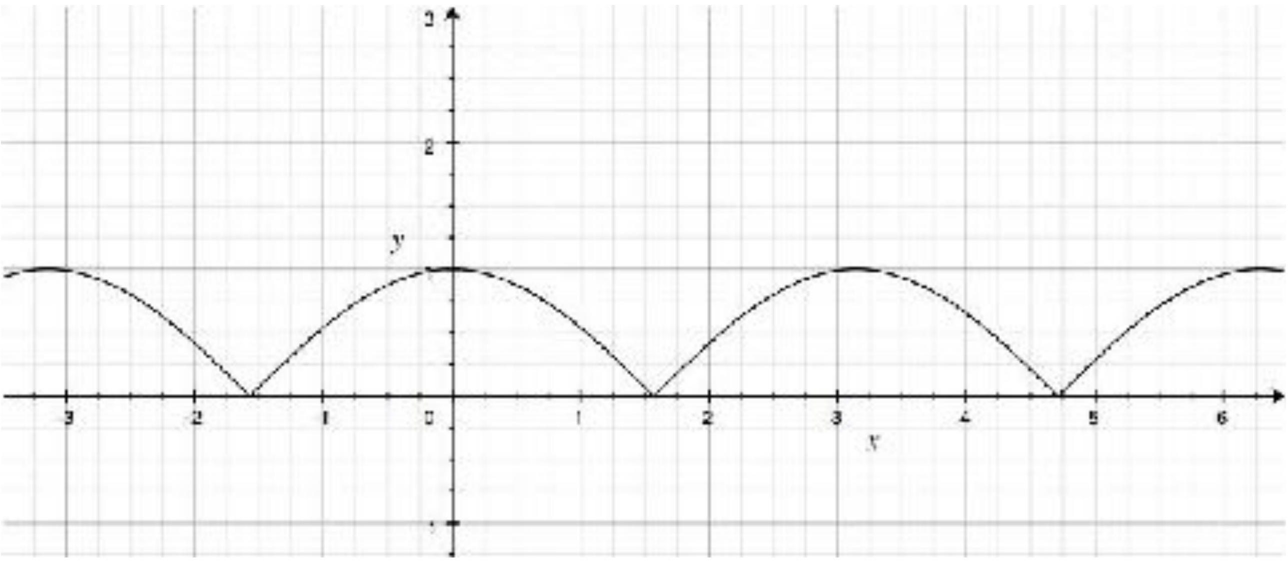
1.b)

I passaggi sono: $\cos x \rightarrow |\cos x|$ .

Il grafico di cos*x* è il seguente:



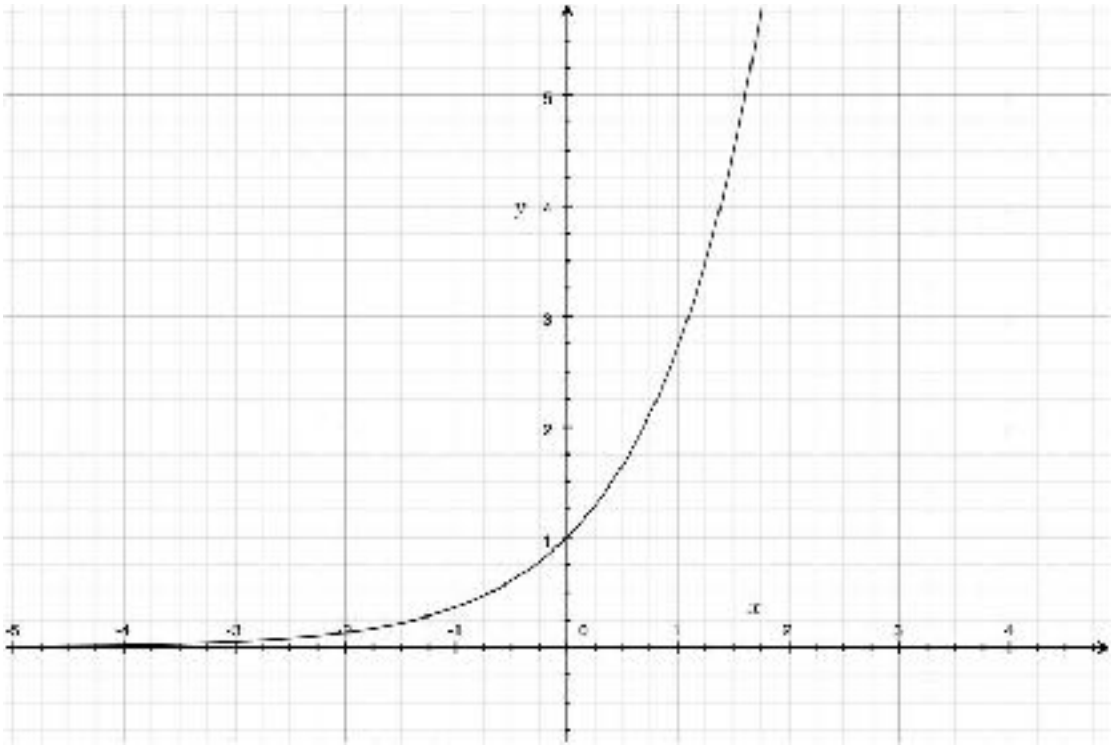

Per ottenere il nostro risultato, bisogna ribaltare attorno all'asse orizzontale la parte di grafico con le y negative. Il grafico finale è quindi il seguente:



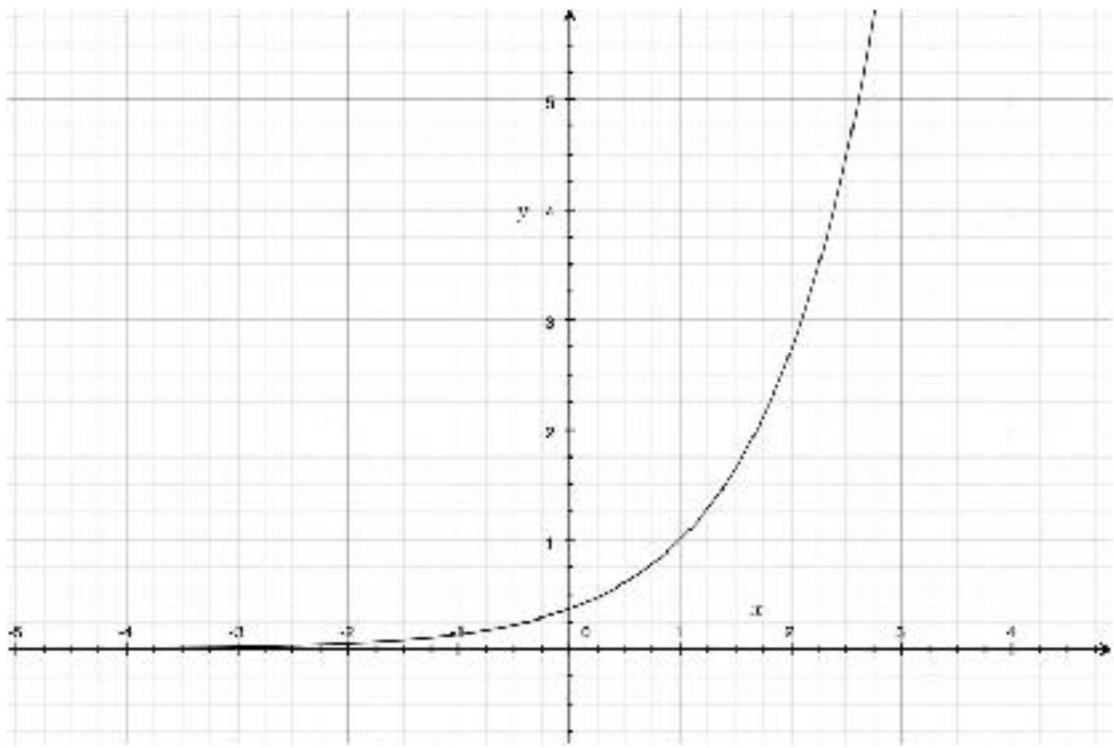
1.c)

I passaggi sono: $e^x \rightarrow e^{x-1} \rightarrow e^{|x-1|}$ .

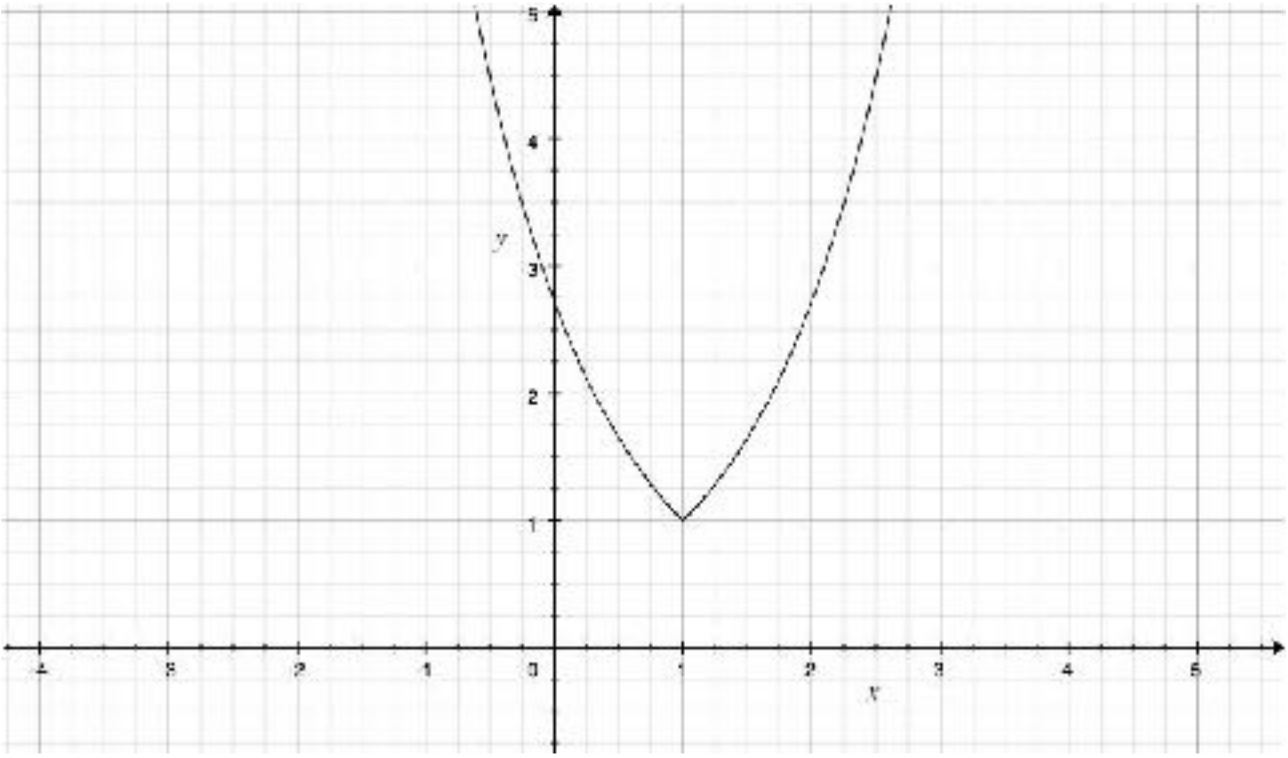
Il grafico di $e^x$ è il seguente:



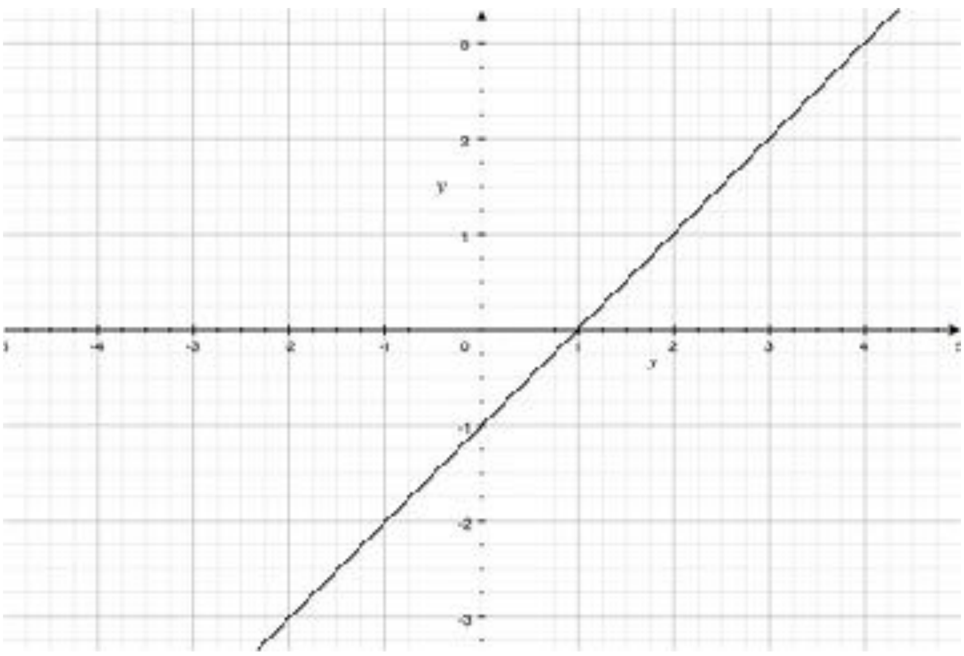
Il grafico di $e^{x-1}$ si ottiene dal precedente traslandolo verso destra di 1 (consiglio: per eliminare ogni dubbio sulle traslazioni dei grafici, e in generale su tutte le trasformazioni, provate a prendere 3 punti furbi e vedere se quello che pensate è corretto):



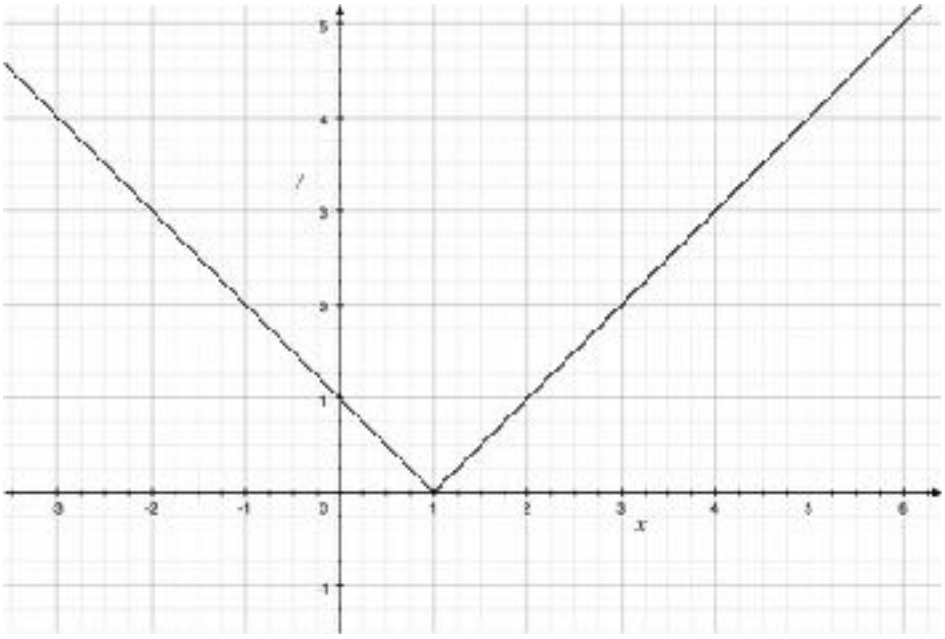
Infine il grafico finale si ottiene ribaltato intorno all'asse x=1 il grafico precedente:



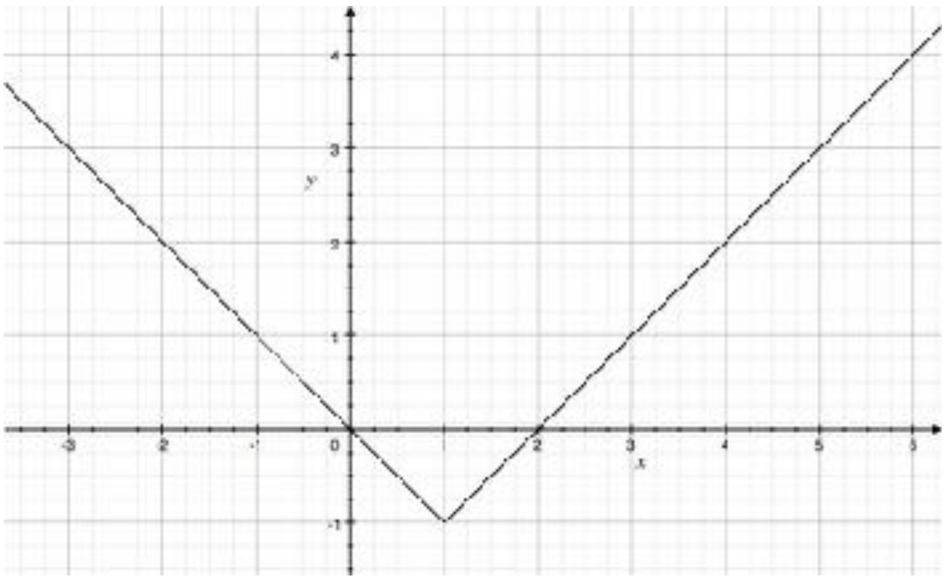
1.d)
I passaggi sono: $x \to x-1 \to |x-1| \to |x-1|-1 \to ||x-1|-1|$ .
Il grafico di x-1 è:



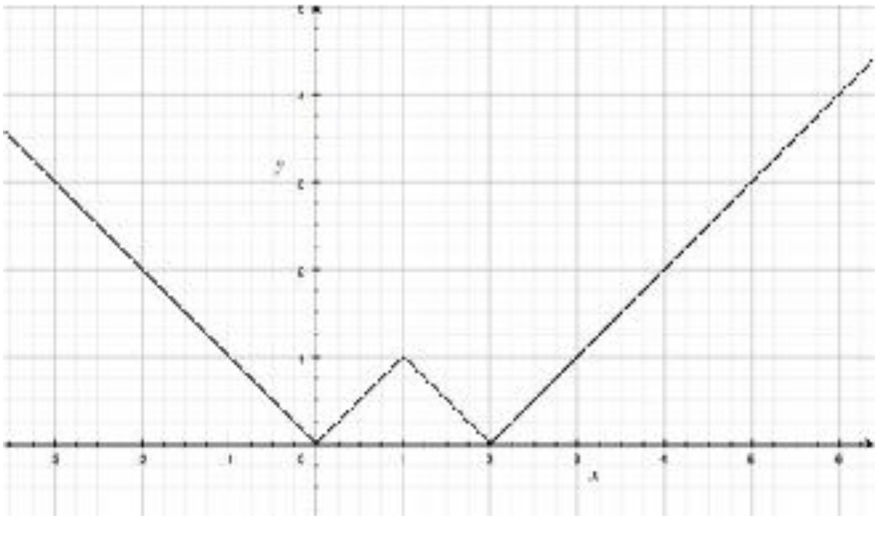
Il grafico di $|x-1|$ si ottiene ribaltando intorno all'asse x=1 il grafico precedente:



Il grafico di $|x-1|-1$ si ottiene traslando il grafico precedente verso il basso di 1:



Infine si ribalta la parte negativa delle y intorno all'asse orizzontale e il grafico finale è:



2.a)
Questo limite si risolve facilmente ragionando con la gerarchia degli infiniti e analizzando il grado del numeratore e del denominatore. Si vede facilmente che il grado (massimo) del numeratore è 4 mentre al denominatore il grado è 3: grado numeratore > grado denominatore, allora il limite è $+\infty$

2.b)
Attraverso l'algebra dei limiti, il limite di una somma è la somma dei limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2+5n}{7+3n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{2+5n}{7+3n}$$

Studiamo separatamente i due limiti:

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ : è il prodotto di una successione limitata, cioè $(-1)^n$ (che è sempre uguale a 1 o -1), e una successione infinitesima, cioè $\frac{1}{n}$ . Siamo proprio nel caso del teorema del limite di un prodotto tra una successione limitata e una infinitesima: il risultato di questo primo limite è quindi 0.
- $\lim_{n\to+\infty}\frac{2+5n}{7+3n}$ : per questo altro caso ragioniamo sul grado del numeratore e del denominatore. Entrambi hanno grado 1: come in generale quando il grado è lo stesso, il risultato è dato dal rapporto tra i coefficienti di grado massimo; in questo caso quindi il risultato è 5/3.

Avendo il risultato dei due limiti separati non ci resta che sommarli: il risultato finale è $\frac{5}{3}$ .

2.c)
Anche in questo caso ragioniamo sul grado: il numeratore ha grado 1 mentre il denominatore ha grado 3. Pertanto: grado denominatore > grado numeratore $\Rightarrow$ il limite è 0.

2.d)
Anche in questo caso ragioniamo sul grado (ignorando il logaritmo perché è quello più "insignificante" nella gerarchia degli infiniti"): confrontando gli esponenti abbiamo $n^2$ al numeratore e $\sqrt{n^5}=\left(n^{1/2}\right)^5=n^{5/2}$ . Pertanto: grado denominatore > grado numeratore $\Rightarrow$ il limite è 0.

2.e)

Proviamo a ricondurci al limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ .

All'interno della parentesi sommo e sottraggo 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-(n-1)}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-n+1}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n.$$

Non va bene il 2 al numeratore: sappiamo che $\frac{1}{\frac{n-1}{2}}$ quindi: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^n$

Adesso dobbiamo sistemare l'esponente: sommo e sottraggo 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n-1+1}$$ e applicando le proprietà delle potenze otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Ora al primo esponente manca un denominatore: lo aggiungo e lo tolgo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot 2}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)$$

A questo punto possiamo applicare il limite all'interno della parentesi quadrata (ricordiamo l'algebra dei limiti) e otteniamo $e^2$ dalla prima parentesi. La seconda diventa 1 passando al limite. In definitiva il limite richiesto è: $e^2$ .

Un'altra strada per risolvere tale limite è raccogliere una n al numeratore e al denominatore, semplificarla e ricondursi sempre allo stesso limite notevole:

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}=\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}\to\frac{e}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}=e\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e\cdot\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}=e\cdot e=e^2$$

2.f)

Anche qui sfruttiamo l'algebra dei limiti per cui il limite del prodotto di due successioni è pari al prodotto dei limiti delle singole successioni: $\lim_{n\to+\infty} n^2 2^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}}$ .

- $\lim_{n\to+\infty} n^2$ : il risultato di questo primo limite è chiaramente $+\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}}$ : se in questo caso sostituiamo a n $+\infty$ abbiamo $2^{\frac{1}{+\infty}}=2^0=1$ .

Il risultato finale è il prodotto dei due risultati parziali: $+\infty\cdot 1=+\infty$.

2.g)

In questo caso ignoriamo $(-1)^n$ che essendo limitata non comporta alcun cambiamento nel limite: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan n}{n+(-1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\arctan n\cdot\frac{1}{n}$ . Ora, come nell'esercizio 2.b, abbiamo il prodotto tra una limitata (l'arcotangenge) e una infinitesima (1/n): il risultato finale è 0.