Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

27/10/2016 - Numeri complessi e funzioni

1. Mettere in forma trigonometrica il numero complesso $z=\dfrac{1}{4+4i}$
2. Mettere in forma cartesiana il numero complesso $z=\dfrac{1+3i}{-2+3i}$
3. Calcolare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $z=\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^{10}}$
4. Risolvere le seguenti equazioni:
   (a) $|z|^2+z^2-iz-1=0$
   (b) $z+3i+\operatorname{Re}z\left(i+(\operatorname{Im}z)^2\right)=0$

---

5. Studiare la simmetria delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$
   (b) $f(x)=e^{1-x^2}$
   (c) $f(x)=x^3+x$

– –

<u>Compito</u>: Disegnare il grafico di $f(x)$ dispari, periodica di periodo $T=2$ tale che $f(x)=1$ per $x\in(0,\,1)$

Soluzioni

1)
Abbiamo due modi per risolvere l'esercizio:

- considerare il numero complesso come rapporto dei numeri complessi $z_1 = 1$ e $z_2 = 4 + 4i$, calcolare il loro modulo e argomento e applicare De Moivre:

$$z_1 = 1 = 1 + 0 \cdot i \ , \ \ \mathrm{Re}(z_1) = 1 \quad \mathrm{Im}(z_1) = 0$$

$$\rho_1 = \sqrt{\mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2} = \sqrt{1+0} = 1$$

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{\rho_1} = \frac{1}{1} = 1 \ \ , \ \ \sin\vartheta_1 = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{\rho_1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \to \quad \vartheta_1 = 0$$

$$z_2 = 4 + 4i \ \ , \ \ \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Im}(z_2) = 4$$

$$\rho_2 = \sqrt{\mathrm{Re}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos\vartheta_2 = \frac{\mathrm{Re}(z_2)}{\rho_2} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ , \ \ \sin\vartheta_2 = \frac{\mathrm{Im}(z_2)}{\rho_2} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \to \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{4}$$

De Moivre: $\rho = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$, $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$

Forma trigonometrica: $z = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

- svolgere operazioni algebriche eliminando la *i* dal denominatore:

$$z = \frac{1}{4+4i} = \frac{4-4i}{(4+4i)\cdot(4-4i)} = \frac{4-4i}{16-16i^2} = \frac{4-4i}{16+16} = \frac{4-4i}{32} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$$

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{8} \ \ , \ \rho = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{64}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\rho} = \frac{1/8}{\sqrt{2}/8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ , \ \ \sin\vartheta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\rho} = \frac{-1/8}{\sqrt{2}/8} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{4}$$

Forma trigonometrica: $z = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

2) Metodo algebrico:

$$z = \frac{1+3i}{-2+3i} = \frac{(1+3i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-3i-6i-9i^2}{4-9i^2} = \frac{-2-9i+9}{4+9} = \frac{7-9i}{13} =$$

$$= \frac{7}{13} - \frac{9}{13}i$$

3) Per questo esercizio De Moivre è fondamentale: la potenza è un prodotto ripetuto, per cui l'elevamento, ad esempio, all'ottava corrisponde alla moltiplicazione ripetuta 8 volte. Nella moltiplicazione, i moduli vengono moltiplicati e gli argomenti vengono sommati. Facciamo questo ragionamento sia per il numeratore sia per il denominatore:

$$z_1 = (1+i)^8 = (1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)$$

$$\rho_n = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \vartheta_n = \frac{\pi}{4} \quad \left(\cos\vartheta_n = \sin\vartheta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\rho_1 = \rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n\cdot\rho_n = \rho_n^{\ 8} = \left(\sqrt{2}\right)^8 = \left(2^{1/2}\right)^8 = 2^4 = 16$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n+\vartheta_n = 8\vartheta_n = 8\frac{\pi}{4} = 2\pi = 0$$

$$z_2 = (1-i)^{10} = (1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)\cdot(1-i)$$

$$\rho_d = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \vartheta_d = -\frac{\pi}{4} \quad \left(\cos\vartheta_d = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\vartheta_d = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\rho_2 = \rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d\cdot\rho_d = \rho_d^{\ 10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} = \left(2^{1/2}\right)^{10} = 2^5 = 32$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d+\vartheta_d = 10\vartheta_d = 10\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

A questo punto applichiamo De Moivre al rapporto:

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad , \quad \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Quindi il numero complesso è: $z = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[0+i] = \frac{1}{2}i$

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$$

4.a)

Consideriamo il numero complesso *z* come $z = x+iy \ , \ \rho = \sqrt{x^2+y^2}$.
Sostituendo nell'equazione abbiamo:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + (x+iy)^2 - i(x+iy) - 1 = 0 \rightarrow x^2+y^2+x^2+2ixy+i^2y-ix-i^2y-1=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2+y^2+2ixy-y^2-ix+y-1=0 \rightarrow 2x^2+2ixy-ix+y-1=0$$

A questo punto abbiamo un numero complesso a sinistra dell'uguale e un numero complesso (0) a destra dell'uguale. Affinché due numeri complessi siano uguali, essi devono avere uguali sia le parti reali sia le parti immaginarie: raccogliamo quindi una *i* a sinistra dell'uguale e imponiamo l'uguaglianza delle due parti:

$$2x^2+y-1+i(2xy-x)=0$$

$$\begin{cases} 2x^2+y-1=0 \\ 2xy-x=0 \to x(2y-1)=0 \to x=0 \vee 2y-1=0 \to x=0 \vee y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Avendo trovato due possibili soluzioni dalla seconda equazione, ne sostituiamo una alla volta nella prima:

$$x=0 \xrightarrow{\text{nella 1° equazione}} 0+y-1=0 \to y=1$$

$$y=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{nella 1° equazione}} 2x^2+\frac{1}{2}-1=0 \to 2x^2-\frac{1}{2}=0 \to 2x^2=\frac{1}{2} \to x^2=\frac{1}{4} \to x=\pm\frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo trovato 3 soluzioni: $z_1=0+1\cdot i=i$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$

4.b)

Anche in questo caso consideriamo $z=x+iy$, $\mathrm{Re}(z)=x$, $\mathrm{Im}(z)=y$ e sostituiamo nell'equazione:

$$x+iy+3i+x(i+y^2)=0 \to x+iy+3i+ix+xy^2=0$$

Anche in questo caso dobbiamo uguagliare le parti reali e le parti immaginarie tra il numero complesso a sinistra e quello a destra dell'uguale:

$$x+xy^2+i(y+3+x)=0$$

impossibile

$$\begin{cases} x+xy^2=0 \to x(1+y^2)=0 \to x=0 \vee 1+y^2=0 \to x=0 \vee y^2=-1 \to x=0 \\ y+3+x=0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema troviamo un unico risultato: $x=0$. Lo sostituiamo nella seconda equazione e si trova: $y=-3$.

Pertanto il numero complesso trovato è: $z=0-3i=-3i$.

5) Ricordiamo che una funzione è pari se $f(x)=f(-x)$; una funzione è dispari se $f(-x)=-f(x)$. Per studiare quindi la simmetria di una funzione calcoliamo $f(-x)$ e verifichiamo se è uguale a $f(x)$ (quindi parità), oppure a $-f(x)$ (quindi disparità) oppure a nessuna delle due.

5.a) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=f(x) \to \text{funzione pari}$

Per le proprietà degli archi associati, sin(-x) = -sinx

5.b) $f(-x)=e^{1-(-x)^2}=e^{1-(x^2)}=e^{1-x^2}=f(x) \to \text{funzione pari}$

5.c) $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-f(x) \to \text{funzione dispari}$