Tutorato Analisi 1

Ing. Edile - Architettura 16/17

Tutor: Irene Rocca

13/10/2016 - Disequazioni, equazioni e numeri complessi

1. Risolvere le seguenti disequazioni:
   (a) $x^2 + |x-1| \geq 1$
   (b) $|x-1| \leq 2$
   (c) $|x+1| + 2 \leq |2x-1|$

2. Risolvere: $2^{\log_2(x)} = 8$

---

3. Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:
   (a) $\dfrac{1+i}{1-i}$
   (b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

Soluzioni

1.a)
Come in tutti gli esercizi in cui compare un modulo, dobbiamo studiare il segno dell'argomento e analizzare separatamente i due casi (perché il modulo di qualcosa di positivo rimane positivo, mentre il modulo di qualcosa di negativo cambia il segno e lo rende positivo).
In questo esercizio dobbiamo quindi studiare il segno di x-1: se (x-1) è positivo, posso semplicemente togliere il modulo; se (x-1) è negativo, posso togliere il modulo MA devo mettere un segno - davanti, cioè tolgo |x-1| e scrivo -(x-1). Andiamo bene nel dettaglio:

- caso $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

  $x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$

  $\Delta = 9 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$

  Disequazione con segno $\geq$ quindi prendo i valori esterni: $x \leq -2 \vee x \geq 1$

  Vediamo se sono accettabili le soluzioni: siamo nel caso in cui $x \geq 1$ quindi $x \leq -2$ non è accettabile. In definitiva, la soluzione di questo primo caso è $x \geq 1$.

- caso $x-1<0 \rightarrow x<1$

  $x^2+|x-1| \geq 1 \rightarrow x^2-(x-1) \geq 1 \rightarrow x^2-x+1 \geq 1 \rightarrow x^2-x \geq 0$

  Potrei procedere come prima calcolando il delta e le due soluzioni. Però posso notare che tra i due termini della disequazione c'è una x in comune e posso raccoglierla:

  $x^2-x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$. Ora abbiamo due fattori: x e (x-1). Il prodotto è positivo quando o entrambi sono positivi (perché + * + = +) oppure quando entrambi sono negativi (perché - * - = +). Facciamo bene il procedimento: studiamo i segni dei singoli fattori e vediamo quando sono positivi (potremmo vedere quando sono negativi, ma per comodità si studiano i segni positivi):

  $x \geq 0$

  $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

	0	1
-	+	+
-	-	+
+	-	+

  Come dallo schema dei segni, le soluzioni sono:
  $x \leq 0 \vee x \geq 1$

  Anche in questo caso verifichiamo se sono accettabili: siamo nel caso in cui $x<1$, quindi $x \geq 1$ non è accettabile. In definitiva la soluzione di questo caso è $x \leq 0$.

Ora abbiamo le soluzioni dei due casi e dobbiamo metterle insieme, non a sistema ma come unione. Il risultato dell'esercizio è: $x \leq 0 \vee x \geq 1$

1.b)
Stesso modulo dell'esercizio precedente; ancora i due casi:

- caso $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

  $|x-1| \leq 2 \rightarrow x-1 \leq 2 \rightarrow x \leq 3$

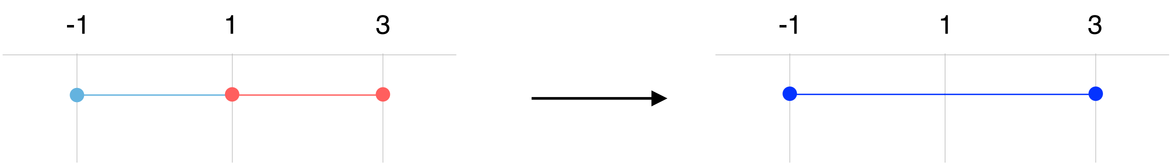
  È accettabile? Ni: siamo nel caso in cui $x \geq 1$ e la soluzione ci dice $x \leq 3$, quindi in questo caso noi accettiamo solo le x comprese tra 1 e 3, cioè: $1 \leq x \leq 3$.

- caso $x-1<0 \rightarrow x<1$

  $|x-1| \leq 2 \rightarrow -(x-1) \leq 2 \rightarrow -x+1 \leq 2 \rightarrow x \geq -1$

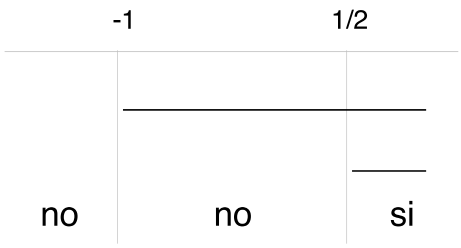
  È accettabile? Anche in questo caso ni, perché le limitazioni ci dicono che siamo nel caso in cui $x<1$. Quindi la soluzione del caso è: $-1 \leq x<1$.

Ora che abbiamo analizzato i due casi, mettiamo insieme le soluzioni. Vediamo che la prima soluzione include 1, mentre la seconda lo esclude: in ordine crescente, la seconda mi dice di andare da -1 incluso a 1 escluso, mentre la prima da 1 incluso a 3 incluso. In definitiva, io posso andare da -1 incluso a 3 incluso: $-1 \leq x \leq 3$ (vedi schema).



1.c)
In questo caso abbiamo due valori assoluti e, dove considerarli separatamente, avremo 4 casi:
primo positivo e secondo positivo (caso 1),
primo positivo e secondo negativo (caso 2),
primo negativo e secondo positivo (caso 3),
primo negativo e secondo negativo (caso 4).
Andiamo per gradi.

- caso 1: $x+1 \geq 0 \wedge 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \wedge x \geq \frac{1}{2}$. Possiamo mettere insieme le due condizioni in una sola: $x \geq \frac{1}{2}$ (vedi schema).



Togliendo i valori assoluti, abbiamo:
$|x+1|+2 \leq |2x-1| \rightarrow x+1+2 \leq 2x-1 \rightarrow x \geq 4$

È accettabile? Sì.

- caso 2: $x+1 \geq 0 \wedge 2x-1 < 0 \rightarrow x \geq -1 \wedge x < \frac{1}{2}$. Anche in questo caso possiamo mettere insieme le due condizioni e il risultato (con uno schema analogo al precedente) è: $-1 \leq x < \frac{1}{2}$.

Togliendo i valori assoluti, abbiamo:
$|x+1|+2 \leq |2x-1| \rightarrow x+1+2 \leq -(2x-1) \rightarrow x+3 \leq -2x+1 \rightarrow 3x \leq -2 \rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$

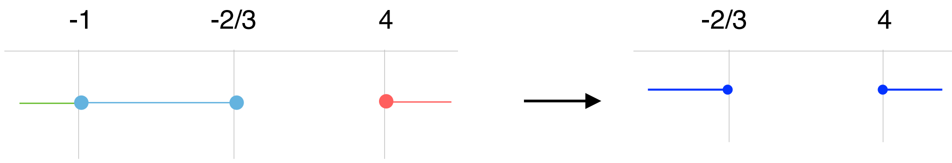
È accettabile? Ni: va limitata a -1, cioè la soluzione corretta è: $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$.

- caso 3: $x+1 < 0 \wedge 2x-1 \geq 0 \rightarrow x < -1 \wedge x \geq \frac{1}{2}$. Le due condizioni sono incompatibili, quindi questo caso non dà soluzione.
- caso 4: $x+1 < 0 \wedge 2x-1 < 0 \rightarrow x < -1 \wedge x < \frac{1}{2}$. Possiamo metterle insieme e otteniamo: $x < -1$.

Togliamo i valori assoluti e otteniamo:
$-(x+1)+2 \leq -(2x-1) \rightarrow -x-1+2 \leq -2x+1 \rightarrow x \leq 0$
È accettabile? Ni: va limitata a partire da -1, quindi la soluzione del caso è: $x < -1$.

Ora che abbiamo analizzato tutti i 4 casi, non ci resta che mettere insieme le soluzioni che sono:

$x \geq 4$
$-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
$x < -1$



La soluzione dell'esercizio, come si evince dallo schema, è: $x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq 4$.

2)
Questo esercizio si risolve immediatamente in quando corrisponde a una delle proprietà dei logaritmi, che tuttavia non sempre è compresa appieno. Occorre sapere che il logaritmo di fatto è un esponente: un esponente che io devo dare alla base del logaritmo per ottenere l'argomento del logaritmo stesso. Es: cos'è il $\log_2 4$? E' l'esponente che devo dare a 2 per ottenere 4.
In questo caso quindi io ho 2 elevato all'esponente che devo dare a 2 per ottenere x.
Ho l'esponente che devo dare a 2 per ottenere x e lo do proprio a 2, quindi ottengo x.

$$2^{\log_2 x} = 8 \rightarrow x = 8$$

(proprietà dei logaritmi: riassunto YouMath)
(proprietà delle potenze: riassunto YouMath)

3.a)
Si può risolvere in due modi: algebrico e con De Moivre.

- algebrico:

voglio eliminare la i dal denominatore: l'unico modo è avere i^2 che sappiamo essere uguale a -1. Come facciamo? Ci viene in soccorso un prodotto notevole: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ e lo possiamo applicare in questo caso moltiplicando sia numeratore sia denominatore per (1+i):

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$i = 0 + 1 \cdot i$, cioè la parte reale (Re) è 0 e la parte immaginaria (Im) è 1.

Modulo: $\rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$.

Argomento: le formule generali ci dicono che $\cos\theta = \frac{\text{Re}}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{\text{Im}}{\rho}$ e in questo caso abbiamo $\cos\theta = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\theta = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

Avremmo potuto anche pensare al grafico: la i si trova sull'asse immaginario ed essendo l'unità immaginaria si trova a distanza 1 dal centro. Quindi modulo 1 e argomento (cioè l'angolo che il segmento tra l'origine e i forma con il semiasse orizzontale positivo) è π/2.

- De Moivre:

le formule di De Moivre dicono che, dati due numeri complessi z1 e z2
$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
si ha che:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right) \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

quindi:

nel quoziente i moduli si dividono e gli argomenti si sottraggono;
nel prodotto i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano.

Nel nostro caso abbiamo bisogno di conoscere modulo e argomento sia del numeratore sia del denominatore.

Numeratore: $\rho_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Denominatore: $\rho_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \to \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Quindi in definitiva: $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ e $\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

3.b)
Anche qui sono possibili i due modi. Risolviamo con De Moivre, quindi analizzando numeratore e denominatore prima di tutto.

Numeratore: $\rho_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Denominatore: $\rho_2 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ e $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta_2 = \frac{1}{2} \to \theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

Quindi: $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.